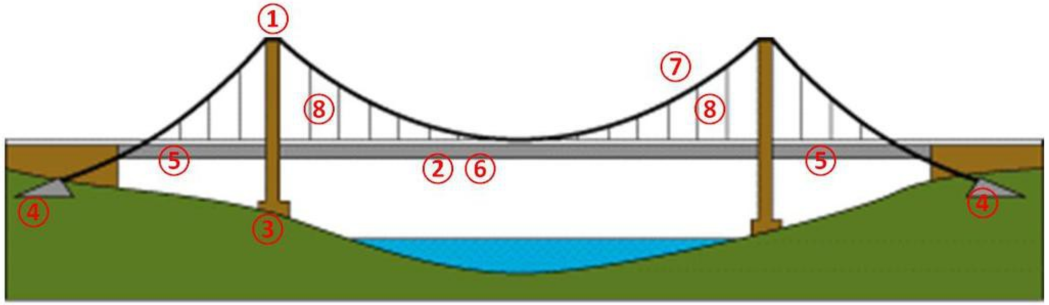
Ex 1 : *La Chaînette & les Ponts suspendus*

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation d'une fonction g définie sur $[-1\,;1]$ par : $g(x)=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$ avec $a>0$; On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation $(E):(x-1)e^{2x}-x-1=0$



<u>Les appuis</u> : les piles (1) soutiennent le tablier (2) qui transmettent les charges aux fondations (3) et les culées (4)	<u>Le tablier</u> : support de circulation des véhicules entre les traves de rives (5) et le travée centrale (6)	<u>Les cables</u> : les ponts contiennet des cables porteurs (7) et les suspentes (8) qui soutiennet le tablier

On pose la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)e^{2x}-x-1$

1) Calculer la dérivée $f'(x)$, préciser les valeurs de $f'(0)$ et $f'(1)$
2) On note f'' la fonction dérivée de la fonction f'
   a) Montrer que pour tout $x\geqslant 0$: $f''(x)=4xe^{2x}$
   b) Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les variations de f' sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$
   c) Montrer que l'équation $f'(x)=0$ possède une solution unique $\alpha\in[0\,;1]$ (on pourra utiliser le tableau de variations)
   d) Déterminer une valeur approchée de α à 0,01 près
3) a) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$
   b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique $a\in[0\,;2]$ (on pourra utiliser le tableau de variations)
   c) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-4} près
   d) Construire l'allure du graphique de la fonction g à l'aide du paramètre a obtenu en question précédente

Ex 2 : *Température d'un Four industriel*

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C.
À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser. On note t le temps, en heure, écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par : $f(t)=ae^{-0,2t}+b$ avec $a\,,b\in\mathbb{R}$

1) Déterminer les valeurs de a et b sachant que f est solution de l'équation différentielle $f'(t)+0{,}2\,f(t)=4$ et $f(0)=1000$
2) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe
   b) Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$
   c) Vers quelle valeur tend la fonction f pour un temps t très long?
3) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ? justifier

Ex 3 : *Datation au carbone 14*

Désintégration atomique : Si $N(t)$ est le nombre de noyaux d'un corps radioactif présent à l'instant t (t en années), la variation $dN(t)$ de ce nombre pendant la durée dt (par désintégration) est proportionnelle à $N(t)$.

On a alors : $N'(t)=-\lambda N(t)$ avec $\lambda>0$ (cette valeur λ s'appelle la constante de désintégration) ; On sait qu'à $t=0$ ce corps contenait 2000 noyaux radioactifs et qu'au bout de 2000 ans, ce corps contenait 842 noyaux radioactifs

1) a) On admet que $N(t)=ae^{-\lambda t}$; déterminer les valeurs de a et λ
   b) Le « temps de ½ vie » est l'instant noté $t_{1/2}$ où ce corps contient exactement la moitié des noyaux radioactifs par rapport à l'instant initial ; déterminer le temps de ½ vie de cet élément radioactif
   c) En vous aidant du *QR-code* ci-contre déterminer la nature de cet élément radioactif
2) Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À leur mort, celui-ci se désintègre avec une demi-vie de 5 730 ans. Si un fragment d'os contient 71% de sa quantité initiale de carbone 14, quel âge a-t-il ?