Correction 1

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$f(2+h) = 3{\cdot}(2+h)^2 - 2{\cdot}(2+h) = 3{\cdot}(4+4{\cdot}h+h^2) - 4 - 2h$

$= 12 + 12{\cdot}h + 3{\cdot}h^2 - 4 - 2{\cdot}h = 3{\cdot}h^2 + 10{\cdot}h + 8$

2. a.
- On a :
$f(2) = 3{\times}2^2 - 2{\times}2 = 3{\times}4 - 4 = 12 - 4 = 8$
- On a la simplification du quotient :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\big(3{\cdot}h^2+10{\cdot}h+8\big)-8}{h} = \frac{3{\cdot}h^2+10{\cdot}h}{h}$$
$$= \frac{h{\cdot}(3{\cdot}h+10)}{h} = 3{\cdot}h+10$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} 3{\cdot}h+10 = 10$$

b. On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 2 :
$f'(2) = 10$

Correction 2

1. On a :
- $f(2+h) = \big(2+h\big)^2 - 3{\cdot}\big(2+h\big) + 1$
$= \big(4+4h+h^2\big) - 6 - 3{\cdot}h + 1 = h^2 + h - 1$
- $f(2) = 2^2 - 3{\times}2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$

On en déduit la simplification :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{h^2+h-1-(-1)}{h} = \frac{h^2+h-1+1}{h}$$
$$= \frac{h^2+h}{h} = \frac{h{\cdot}\big(h+1\big)}{h} = h+1$$

2. On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 2 :

$$f'(2) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} h+1 = 1$$

Correction 3

1. On a :
- $f(1+h) = \dfrac{\big(1+h\big)+3}{\big(1+h\big)+1} = \dfrac{h+4}{h+2}$
- $f(1) = \dfrac{1+3}{1+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

On en déduit :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{h+4}{h+2}-2}{h} = \frac{\dfrac{h+4}{h+2}-\dfrac{2{\cdot}\big(h+1\big)}{h+2}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{h+4}{h+2}-\dfrac{2{\cdot}h+2}{h+2}}{h} = \frac{\dfrac{h+4-\big(2{\cdot}h+2\big)}{h+2}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{h+4-2{\cdot}h-4}{h+2}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{h+2}}{h} = \frac{-h}{h+2}\times\frac{1}{h} = -\frac{1}{h+2}$$

2. On en déduit la valeur du nombre dérivée :

$$f'(1) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} -\frac{1}{h+2} = -\frac{1}{2}$$

3. On a :

$$f(1) = \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

la tangente (T) la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :

$$y = f'(a){\cdot}\big(x-a\big) + f(a)$$
$$y = -\frac{1}{2}{\cdot}\big(x-1\big) + f2$$
$$y = -\frac{1}{2}{\cdot}x + \frac{1}{2} + 2$$
$$y = -\frac{1}{2}{\cdot}x + \frac{5}{2}$$

Correction 4

Avant de déterminer la valeur du nombre dérivée en -1, effectuons les calculs suivants :

- On a les transformations algébriques suivantes :
$f\big(-1+h\big) = \big(-1+h\big)^2 + 3{\times}(-1+h) + 1$
$= \big(-1\big)^2 + 2{\times}(-1){\times}h + h^2 - 3 + 3{\cdot}h + 1$
$= 1 - 2{\cdot}h + h^2 - 3 + 3{\cdot}h + 1 = h^2 + h - 1$
- $f(-1) = (-1)^2 + 3{\times}(-1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

Le nombre dérivée $f'(-1)$ de la fonction f en -1 a pour valeur :

$$f'(-1) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{h^2+h-1-(-1)}{h}$$
$$= \lim_{h\mapsto 0}\frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{h{\cdot}\big(h+1\big)}{h} = \lim_{h\mapsto 0} h+1 = 1$$

Correction 5

- Simplifions l'expression suivante :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{2{\cdot}\big(1+h\big)+1}{\big(1+h\big)+2}-\dfrac{2{\times}1+1}{1+2}}{h}$$
$$= \Big(\frac{2+2{\cdot}h+1}{h+3}-\frac{2+1}{3}\Big)\times\frac{1}{h} = \Big(\frac{2{\cdot}h+3}{h+3}-\frac{3}{3}\Big)\times\frac{1}{h}$$
$$= \Big(\frac{2{\cdot}h+3}{h+3}-1\Big)\times\frac{1}{h} = \Big(\frac{2{\cdot}h+3}{h+3}-\frac{h+3}{h+3}\Big)\times\frac{1}{h}$$
$$= \Big(\frac{\big(2{\cdot}h+3\big)-\big(h+3\big)}{h+3}\Big)\times\frac{1}{h} = \frac{2{\cdot}h+3-h-3}{h+3}\times\frac{1}{h}$$
$$= \frac{h}{h+3}\times\frac{1}{h} = \frac{1}{h+3}$$

- On en déduit la limite :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{h+3} = \frac{1}{3}$$

- Ainsi, le nombre dérivé de la fonction f pour $x=1$ a pour valeur $\dfrac{1}{3}$.

Correction 6

Déterminons les expressions suivantes :

- $f(4+h) = \big(4+h\big){\cdot}\sqrt{4+h}$
- $f(4) = 4{\cdot}\sqrt{4} = 4{\times}2 = 8$

On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{(h+4)\sqrt{h+4}-8}{h}$$
$$= \frac{\left[(h+4)\sqrt{h+4}-8\right]\left[(h+4)\sqrt{h+4}+8\right]}{h\cdot\left[(h+4)\sqrt{h+4}+8\right]}$$
$$= \frac{\left[(h+4)\sqrt{h+4}\right]^2-8^2}{h\cdot\left[(h+4)\sqrt{h+4}+8\right]} = \frac{(h+4)^2\cdot\left(\sqrt{h+4}\right)^2-64}{h\cdot\left[(h+4)\sqrt{h+4}+8\right]}$$
$$= \frac{(h+4)^2\cdot(h+4)-64}{h\cdot\left[(h+4)\sqrt{h+4}+8\right]} = \frac{(h+4)^3-64}{h\cdot\left[(h+4)\sqrt{h+4}+8\right]}$$

On a le développement :

$$(h+4)^3 = (h+4)^2\cdot(h+4) = \left(h^2+8\cdot h+16\right)\cdot(h+4)$$
$$= h^3+8\cdot h^2+16\cdot h+4\cdot h^2+32\cdot h+64$$
$$= h^3+12\cdot h^2+48\cdot h+64$$

Reprenons l'expression du quotient :

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{h^3+12\cdot h^2+48\cdot h+64-64}{h\cdot\left[(h+4)\sqrt{h+4}+8\right]}$$
$$= \frac{h^3+12\cdot h^2+48\cdot h}{h\cdot\left[(h+4)\sqrt{h+4}+8\right]} = \frac{h\cdot\left(h^2+12\cdot h+48\right)}{h\cdot\left[(h+4)\sqrt{h+4}+8\right]}$$
$$= \frac{h^2+12\cdot h+48}{(h+4)\sqrt{h+4}+8}$$

On a les deux limites :

$$\lim_{h\mapsto 0} h^2+12\cdot h+48 = 48 \quad ; \quad \lim_{h\mapsto 0} (h+4)\sqrt{h+4}+8 = 16$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 4 :

$$f'(4) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{h^2+12\cdot h+48}{(h+4)\sqrt{h+4}+8}$$
$$= \frac{48}{16} = 3$$

