Correction 1

Le nombre dérivée de la fonction g en -1 est définie par la limite :

$$f'(-1)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

On a les transformation algébrique suivante :

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{2(-1+h)^2-3(-1+h)-2}-\sqrt{3}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{2(1-2h+h^2)+3-3h-2}-\sqrt{3}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{2-4h+2h^2+3-3h-2}-\sqrt{3}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{2h^2-7h+3}-\sqrt{3}}{h}$$

Le facteur $\sqrt{2h^2-7h+3}+\sqrt{3}$ est non-nul :

$$=\frac{\left(\sqrt{2h^2-7h+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2h^2-7h+3}+\sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{2h^2-7h+3}+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{2h^2-7h+3-3}{h\left(\sqrt{2h^2-7h+3}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2h^2-7h}{h\left(\sqrt{2h^2-7h+3}+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{2h-7}{\sqrt{2h^2-7h+3}+\sqrt{3}}$$

Ainsi, le nombre dérivé en -1 a pour valeur :

$$f'(-1)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{2h-7}{\sqrt{2h^2-7h+3}+\sqrt{3}}=\frac{-7}{2\sqrt{3}}=-\frac{7\sqrt{3}}{6}$$

L'équation réduite de la tangente s'obtient par la formule :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$
$$y=f'(-1)\big[x-(-1)\big]+f(-1)$$
$$y=-\frac{7\sqrt{3}}{6}(x+1)+\sqrt{3}$$
$$y=-\frac{7\sqrt{3}}{6}x-\frac{7\sqrt{3}}{6}+\sqrt{3}$$
$$y=-\frac{7\sqrt{3}}{6}x-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Correction 2

1. Déterminons le signe du polynôme du second degré situé sous le radical. Ce polynôme a pour discriminant :

$$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=13^2-4{\times}6{\times}(-5)=169-(-120)=289$$

On a la simplification : $\sqrt{289}=\sqrt{17^2}=17$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-13-17}{2{\times}6}=\frac{-30}{12}=-\frac{5}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-13+17}{2{\times}6}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Le coefficient du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$6x^2+13x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Une racine carrée n'étant définie que pour un nombre positif ou nul, on en déduit que l'image d'un nombre x par la fonction f ne peut exister que si l'expression sous le radical est positif ou nul. On en déduit l'ensemble de définition de la fonction f :

$$\mathcal{D}_f=I=\left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$$

2. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme de la composée d'une fonction u par la fonction racine carrée où :

$$u(x)=6x^2+13x-5\quad;\quad u'(x)=12x+13$$

Par la formule de la dérivée de la composée d'une fonction par la fonction racine carrée, on obtient l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2{\cdot}\sqrt{u(x)}}=\frac{12x+13}{2{\cdot}\sqrt{6x^2+13x-5}}$$

Ainsi, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{13}{12}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$12x+13$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2\sqrt{6x^2+13x-5}$		$+$	0				0	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$				$\Vert$	$+$	

Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques :

$$f(x)=\sqrt{6x^2+13x-5}=\sqrt{x^2{\cdot}\Big(6+\frac{13}{x}-\frac{5}{x^2}\Big)}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}x^2=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}6+\frac{13}{x}-\frac{5}{x^2}=6$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}x^2{\cdot}\Big(6+\frac{13}{x}-\frac{5}{x^2}\Big)=+\infty\Longrightarrow\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=+\infty$$

De même, on obtient la limite : $\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=+\infty$

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	-∞	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	0	0	↗ $+\infty$

Correction 3

1. En notant u la fonction définie par :
$u(x)=x^2-x-2 \quad ; \quad$ où $u'(x)=2x-1$

D'après la formule de dérivation de la puissance n-ième d'une fonction, on en déduit l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=\frac{1}{8}\times 3\cdot u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^2=\frac{1}{8}\times 3\cdot(2x-1)\cdot\big(x^2-x-2\big)^2$$
$$=\frac{3}{8}\cdot(2x-1)\cdot\big(x^2-x-2\big)^2$$

Un carrée étant toujours positif ou nul, déterminons les valeurs pour lesquelles s'annulent ce polynôme du second degré. Il admet pour discriminant :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-1)^2-4\times1\times(-2)=1+8=9$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)-3}{2\times1}=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)+3}{2\times1}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Ainsi, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\frac{3}{8}\cdot(2x-1)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-x-2		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :

$$f(x)=\frac{1}{8}\cdot\big(x^2-x-2\big)^3=\frac{1}{8}\cdot\Big[x^2\cdot\Big(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\Big)\Big]^3$$
$$=\frac{1}{8}\cdot x^6\cdot\Big(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\Big)^3$$

On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{1}{8}\cdot x^6=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty}\Big(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\Big)^3=1$$

On en déduit la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=+\infty$

De même, on montre que : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=+\infty$

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	-∞		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1,4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. On a les deux valeurs :

- $f(1)=\frac{1}{8}\cdot\big(x^2-x-2\big)^3=\frac{1}{8}\times(-2)^3=\frac{1}{8}\times(-8)=-1$
- $f'(1)=\frac{3}{8}\cdot(2\times1-1)\cdot\big(1^2-1-2\big)^2=\frac{3}{8}\times1\times(-2)^2$
$=\frac{3}{8}\times4=\frac{3}{2}$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet pour équation réduite :

$$y=f'(1)\cdot\big(x-1\big)+f(1)$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot(x-1)-1$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot x-\frac{3}{2}-1$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot x-\frac{5}{2}$$

Correction 4

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$f(x)=\big[u(x)\big]^5$
où la fonction u est définie par :
$u(x)=5x^2+3x+2 \quad ; \quad u'(x)=10x+3$

La formule de dérivation de la puissance n-ième d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction f :
$f'(x)=5\cdot u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^4=5\cdot\big(10x+3\big)\cdot\big(5x^2+3x+2\big)^4$

2. Déterminons le discriminant de l'expression $5x^2+3x+2$:
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=3^2-4\times5\times2=9-40=-31$
Le discriminant de ce polynôme étant strictement négatif, ce polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que le facteur $\big(5x^2+3x+2\big)^4$ est strictement positif.

Le signe de la dérivée f' ne dépend que du facteur $10x+3$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, les variations de la fonction f sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	-∞		$-\frac{3}{10}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

Correction 5

1. La fonction f est définie si l'expression située sous le radical a des valeurs positives ou nulles.
Déterminons le signe du polynôme du second degré situé sous le radical. Il a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=1^2-4\times2\times1=1-8=-7$
Le discriminant étant strictement négatif, on en déduit que ce polynôme a pour signe sur $\mathbb{R}$ le signe de son coefficient du second degré : ce polynôme est touours strictement positif.

On en déduit : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

2. La fonction f est définie par la racine carrée de la fonction u où :
$u(x)=2x^2+x+1 \quad ; \quad u'(x)=4x+1$
La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la racine carré, on obtient l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\cdot\sqrt{u(x)}}=\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+1}}$$

Le dénominateur étant strictement positif, le signe de f' ne dépend que de son numérateur :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variation suivant :

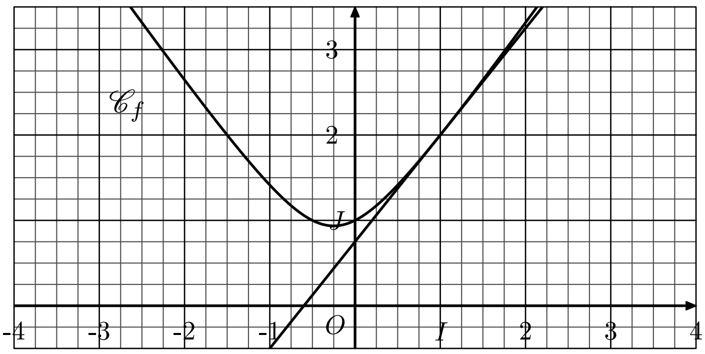
x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

3. (a.) On a les deux valeurs suivantes :

- $f(1) = \sqrt{2{\times}1^2+1+1} = \sqrt{4} = 2$
- $f'(1) = \dfrac{4{\times}1+1}{2{\cdot}\sqrt{2{\times}1^2+1+1}} = \dfrac{5}{2{\times}2} = \dfrac{5}{4}$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet pour équation :

$$y = f'(1){\cdot}\big(x-1\big) + f(1)$$
$$y = \frac{5}{4}{\cdot}\big(x-1\big) + 2$$
$$y = \frac{5}{4}{\cdot}x - \frac{5}{4} + 2$$
$$y = \frac{5}{4}{\cdot}x + \frac{3}{4}$$



Correction 6

1. La fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x^2+2x+5 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x^2+1}$$

qui admettent pour dérivée :

$$u(x) = 2{\cdot}x+2 \quad ; \quad v'(x) = \frac{2{\cdot}x}{2{\cdot}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{\big(2{\cdot}x+2\big){\cdot}\sqrt{x^2+1} - \big(x^2+2x+5\big)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\big(\sqrt{x^2+1}\big)^2}$$
$$= \frac{\dfrac{\big(2{\cdot}x+2\big){\cdot}\big(x^2+1\big) - \big(x^2+2x+5\big)\cdot x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$
$$= \frac{\big(2{\cdot}x+2\big){\cdot}\big(x^2+1\big) - \big(x^2+2x+5\big)\cdot x}{\big(x^2+1\big){\cdot}\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{2x^3+2x+2x^2+2-x^3-2x^2-5x}{\big(x^2+1\big){\cdot}\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{x^3-3x+2}{\big(x^2+1\big){\cdot}\sqrt{x^2+1}}$$

Identifions cette expression de f' à l'expression proposée dans l'énoncé :

$$\frac{\big(x-1\big)\big(x^2+x-2\big)}{\big(x^2+1\big){\cdot}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^3+x^2-2x-x^2-x+2}{\big(x^2+1\big){\cdot}\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+2}{\big(x^2+1\big){\cdot}\sqrt{x^2+1}} = f'(x)$$

2. Etudions le polynôme du second degré $x^2{+}2x{+}5$ qui admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2-4{\times}1{\times}(-2) = 1+8 = 9$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1-3}{2{\times}1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1+3}{2{\times}1} = \frac{2}{2} = 1$$

Le coefficient du terme de second degré étant positif, on connait le signe de ce polynôme.

Le dénominateur du quotient définissant f' est toujours strictement positif, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

La fonction f admet les deux images suivantes :

- $f(-2) = \dfrac{(-2)^2{+}2{\times}(-2){+}5}{\sqrt{(-2)^2{+}1}} = \dfrac{4{+}(-4){+}5}{\sqrt{4{+}1}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
- $f(1) = \dfrac{1^2+2{\times}1+5}{\sqrt{1^2+1}} = \dfrac{1+2+5}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4{\cdot}\sqrt{2}$

On obtient le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Correction 7

Montrons que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ s'interceptent au point d'abscisse 1 :

- $f(1) = 1{\cdot}\mathrm{e}^{1-1^2} = 1{\cdot}\mathrm{e}^{1-1} = 1{\cdot}\mathrm{e}^0 = 1\times1 = 1$
- $g(1) = \mathrm{e}^{1-1} = \mathrm{e}^0 = 1$

Montrons que les deux tangentes respectivement aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont même coefficient directeur :

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
  $u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$
  qui admettent pour dérivée :
  $u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = -2{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{1-x^2}$

  La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
  $f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$
  $= 1{\cdot}\mathrm{e}^{1-x^2} + x{\cdot}\left(-2{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{1-x^2}\right) = \mathrm{e}^{1-x^2} - 2x^2{\cdot}\mathrm{e}^{1-x^2}$

  Le nombre dérivée de la fonction f en 1 a pour valeur :
  $f'(1) = \mathrm{e}^{1-1^2} - 2\times1^2{\cdot}\mathrm{e}^{1-1^2} = \mathrm{e}^{1-1} - 2{\cdot}\mathrm{e}^{1-1}$
  $= \mathrm{e}^0 - 2{\cdot}\mathrm{e}^0 = 1 - 2\times1 = -1$
- La formule de dérivation de la composée d'une fonction exponentielle permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :
  $g'(x) = -1{\cdot}\mathrm{e}^{1-x}$

  Le nombre dérivée de la fonction g en 1 a pour valeur :
  $g'(1) = -1{\cdot}\mathrm{e}^{1-1} = -1{\cdot}\mathrm{e}^0 = -1\times1 = -1$

Ainsi, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ partagent une tangente commune au point d'abscisse 1.