Ex 1 :

Deux méthodes pour déterminer la limite d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

Partie A : première méthode

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{u_n + 2}$.

2) a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n < 1$

b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$ puis montrer que (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ

Partie B : deuxième méthode

1) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Ex 2 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) à l'aide du théorème des gendarmes ou de comparaison dans les cas suivants :

1) $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

2) $u_n = n^2 - 4(-1)^n$

3) $u_n = n + 1 - \cos n$

4) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n^2 - 1} - 2$, $n \geqslant 2$.

Ex 3 :

Vrai-Faux

1) **Proposition 1 :** « Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$. »

2) **Proposition 2 :** « Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$. »

3) **Proposition 3 :** « Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée. »

4) **Proposition 4 :** « Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante. »

Ex 1 : Étudier globalement chaque fonctions suivantes :

(dérivées – signe de la dérivée – tableau de variation – limites – asymptotes)

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{1 - x}$

2) $f(x) = \dfrac{x + 2}{(x + 3)^2}$

3) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

4) $f(x) = \dfrac{3 - 5e^x}{1 + 2e^x}$

Ex 2 :

Déterminer les limites suivantes à l'aide du théorème de composition :

1) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$

2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-2x^2 + 5}$

3) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{-x + 1}{x^2 + 1}}$

4) $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

5) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \cos\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2}\right)$

6) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{e^x}\right)$

7) $\displaystyle\lim_{x \to -3^+} e^{\frac{-2}{x+3}}$ et $\displaystyle\lim_{x \to -3^-} e^{\frac{-2}{x+3}}$

8) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{e^{-x+4}}$

Ex 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$

1) Calculer les limites en -1 et en $+\infty$ et $-\infty$

2) Calculer la fonction dérivée de la fonction f.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f. On calculera les valeurs approchées des extremum de la fonction f à 10^{-2}.

4) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = -4x - 5$? Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s).

5) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $3x - 2y = 0$? Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s).

6) Vérifier ces résultats sur votre calculatrice.
Fenêtre : $x \in [-15\,;\,13]$ et $y \in [-20\,;\,10]$ et graduation : 5 sur les deux axes.