Les Suites

Ex 1 : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$ et $u_0=0$

Partie A :

$$u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}=\frac{2u_n+4-4+1}{u_n+2}=\frac{2(u_n+2)-3}{u_n+2}=2-\frac{3}{u_n+2} \text{ pour tout } n\geqslant 0$$

on pose la relation de récurrence : (P_n) : " $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant u_n\leqslant 1$ "

Initialisation :

$u_0=0$ donc $0\leqslant u_0\leqslant 1$ donc (P_0) est vérifiée

Hérédité :

On suppose que pour un certain rang n , (P_n) est vérifiée

donc $0\leqslant u_n\leqslant 1$ donc $2\leqslant u_n+2\leqslant 3$ donc $\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{1}{u_n+2}\leqslant\dfrac{1}{2}$

donc $\dfrac{-3}{2}\leqslant\dfrac{-3}{u_n+2}\leqslant\dfrac{-3}{3}$ donc $\dfrac{1}{2}\leqslant 2-\dfrac{3}{u_n+2}\leqslant 1$ donc $0<\dfrac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$

donc (P_{n+1}) est encore vérifiée

Conclusion :

la suite (u_n) est minorée par 0 et majorée par 1

$$u_{n+1}-u_n=(2-\frac{3}{u_n+2})-u_n=\frac{(2-u_n)(2+u_n)-3}{u_n+2}=\frac{4-u_n^2-3}{u_n+2}=\frac{1-u_n^2}{u_n+2}$$

or $0\leqslant u_n\leqslant 1$ donc $0\leqslant u_n^2\leqslant 1$ donc $1-u_n^2\geqslant 0$ et $u_n+2>0$

donc $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante

ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée ; d'après le théorème de "*convergence monotone*" on déduit que (u_n) est convergente vers une limite L

d'après le théorème du "*point fixe*" on vérifie que $L=2-\dfrac{3}{L+2}$

donc $L-2=\dfrac{-3}{L+2}$ donc $(L-2)(l+2)=-3$ donc $L^2-4=-3$

donc $L^2=1$ or $0\leqslant L\leqslant 1$ donc $L=1$

Partie B :

On pose la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

$$\text{donc } v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{2-\frac{3}{u_n+2}-1}{2-\frac{3}{u_n+2}+1}=\frac{1-\frac{3}{u_n+2}}{3-\frac{3}{u_n+2}}=\frac{u_n+2-3}{3(u_n+2)-3}=\frac{u_n-1}{3(u_n+1)}=\frac{1}{3}v_n$$

ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{3}$ et de 1er terme $v_0=-1$

donc $v_n=-(\dfrac{1}{3})^n$; or $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}=\dfrac{u_n+1-2}{u_n+1}=1-\dfrac{2}{u_n+1}$

donc $v_n-1=\dfrac{-2}{u_n+1}$ donc $u_n+1=\dfrac{-2}{v_n-1}$ donc $u_n=-1-\dfrac{2}{v_n-1}$

ainsi $u_n=-1-\dfrac{2}{-(\frac{1}{3})^n-1}=-1+\dfrac{2}{(\frac{1}{3})^n+1}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{3})^n=0$

donc la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-1+\dfrac{2}{0+1}=1$

Ex 2 :

$u_n=\dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$; on a : $-1\leqslant\cos(2n)\leqslant 1$ donc $\dfrac{-1}{\sqrt{n}}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ d'après le théorème " *des gendarmes*" : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

$u_n=n^2-4(-1)^n$; on a : $(-1)^n\leqslant 1$ donc $-4(-1)^n\geqslant -4$

donc $u_n\geqslant n^2-4$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-4)=+\infty$

d'après le théorème de "*majoration*" : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

$u_n=n+1-\cos(n)$; on a : $-1\leqslant\cos(n)\leqslant 1$ donc $-1\leqslant-\cos(n)\leqslant 1$

donc $n\leqslant u_n\leqslant n+2$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}(n)=+\infty$

d'après le théorème de "*majoration*" : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

$u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}-2$; on a : $-1\leqslant(-1)^n\leqslant1$ donc $n-1\leqslant n+(-1)^n\leqslant n+1$

or $n^2-1>0$ dès que $n\geqslant2$ donc $\dfrac{n-1}{n^2-1}\leqslant\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}\leqslant\dfrac{n+1}{n^2-1}$

donc $\dfrac{1}{n+1}\leqslant\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}\leqslant\dfrac{1}{n-1}$ donc $\dfrac{1}{n+1}-2\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n-1}-2$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{n+1}-2)=0-2=-2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{n-1}-2)=0-2=-2$

d'après le théorème " *des gendarmes*" : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-2$

Ex 3 :

P1 : *FAUX* car la suite (u_n) définie par $u_n=(-2)^n$ n'est pas majorée et elle ne tend pas vers +infty puisqu'elle est divergente fortement (suite chaotique)

P2 : *FAUX* car la suite (u_n) définie par $u_n=\dfrac{-1}{n}$ est croissante et pourtant elle tend vers 0

P3 : *VRAI* en considérant la contraposée : "Si la suite est majorée alors elle ne tend pas ver $+\infty$ "

P4 : *FAUX* car la suite (u_n) définie par $u_n=n+2\cos(n)$ tend vers $+\infty$; pourtant cette suite n'est pas monotone

<u>Les Fonctions</u>

Ex 1 :

$f(x)=\dfrac{x^2+3}{1-x}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

dérivée : $f'(x)=\dfrac{(2x)(1-x)-(-1)(x^2+3)}{(1-x)^2}=\dfrac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$

points critiques : $f'(x)=0$ donne $-x^2+2x+3=0$ et $x\neq1$
$\Delta=16>0$ alors $x_1=-1$ et $x_2=3$

signe de la dérivée : $(1-x)^2>0$ et $-x^2+2x+3$ est positif entre -1 et 3

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$

Limites : $f(x)=\dfrac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)}=x.\dfrac{1+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\dfrac{3}{x^2})=1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{1}{x}-1)=-1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{1+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}-1})=-1$

et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x)=\pm\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

asymptotes : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{1-x}=ax+b+\dfrac{c}{1-x}=\dfrac{(ax+b)(1-x)+c}{1-x}$

donc $f(x)=\dfrac{(-a)x^2+(a-b)x+(b+c)}{1-x}$; par identification on obtient

$\begin{cases}-a=1\\a-b=0\\b+c=3\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=-1\\-1-b=0\\b+c=3\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=-1\\b=-1\\-1+c=3\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=-1\\b=-1\\c=4\end{cases}$

donc $f(x)=-x-1+\dfrac{4}{1-x}$

or $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(-x-1))=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{1-x}=0$

donc la droite (d) d'équation $y=-x-1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$

de plus la droite (d') d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à C_f

$f(x)=\dfrac{x+2}{(x+3)^2}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

dérivée : $f'(x)=\dfrac{(x+3)^2-2(x+2)(x+3)}{(x+3)^4}=\dfrac{(x+3)-2(x+2)}{(x+3)^3}=\dfrac{-x-1}{(x+3)^3}$

points critiques : $f'(x)=0$ donne $-x-1=0$ et $x\neq -3$ donc $x=-1$

signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+3)^3$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	↘	$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$	↗	$0{,}25$	↘	0

Limites : $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+3)^2}=\dfrac{x(1+\frac{2}{x})}{x^2(1+\frac{3}{x})^2}=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1+\frac{2}{x}}{(1+\frac{3}{x})^2}$

or $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{2}{x})=1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{3}{x})^2=1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{(1+\frac{3}{x})^2}=1$

de plus $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{x})=0$ donc on obtient : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$

asymptotes :
on déduit alors que la droite (d) d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$
de plus la droite (d') d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale à C_f

$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

dérivée : $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$

points critiques : $f'(x)=0$ donne $x^2=0$ ou $x^2+3=0$ donc $x=0$

signe de la dérivée : $x^2\geqslant 0$, $x^2+3>0$ et $(x^2+1)^2>0$ donc $f'(x)\geqslant 0$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Limites : $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}=\dfrac{x^3}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=\dfrac{x}{1+\frac{1}{x^2}}$

or $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x^2})=1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x)=\pm\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$

asymptotes : $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}=\dfrac{(ax+b)(x^2+1)+cx+d}{x^2+1}$

donc $f(x)=\dfrac{(a)x^3+(b)x^2+(a+c)x+(b+c+d)}{x^2+1}$; par identification on obtient

$$\begin{cases}a=1\\b=0\\a+c=0\\b+c+d=0\end{cases}\text{ donc }\begin{cases}a=1\\b=0\\1+c=0\\c+d=0\end{cases}\text{ donc }\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-1\\-1+d=0\end{cases}\text{ donc }\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-1\\d=0\end{cases}$$

on vérifie que $f(x)=x-\dfrac{x}{x^2+1}$ or $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(x))=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x}{x^2+1}=0$

donc la droite (d) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$

$f(x)=\dfrac{3-5e^x}{1+2e^x}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

dérivée : $f'(x)=\dfrac{-5e^x(1+2e^x)-2e^x(3-5e^x)}{(1+2e^x)^2}=\dfrac{-11e^x}{(1+2e^x)^2}$

points critiques : $f'(x)=0$ donne $-11e^x=0$ cela est impossible !

signe de la dérivée : $e^x>0$ et $(1+2e^x)^2>0$ donc $f'(x)<0$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		$-0,7$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	
f	3	$\searrow$	$0,26$	$\searrow$	$-2,5$

Limites : $f(x)=\dfrac{3-5e^x}{1+2e^x}$ *et* $f(x)=\dfrac{3e^{-x}-5}{e^{-x}+2}$

or $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-5e^x)=3$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+2e^x)=1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))=3$

de même $\lim\limits_{x\to+\infty}(3e^{-x}-5)=-5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+2)=2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))=-2,5$

asymptotes :
on déduit alors que la droite (d) d'équation $y=3$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

de même la droite (d) d'équation $y=-2,5$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

<u>rque</u> : ce type de fonction est appelée "fonction logistique"

Ex 2 : Calculs de limites

$f(x)=\sqrt{-x^3+x^2+x}$ en $-\infty$

$f(x)=\sqrt{x^3(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})}=|x|.\sqrt{x(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})}$

or $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ (1), $\lim\limits_{x\to-\infty}x(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=+\infty$

donc par composée avec la racine $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})}=+\infty$

puis par produit avec (1) : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

$f(x)=e^{5-2x^2}$ en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(5-2x^2)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$

donc par composée : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$ en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{1+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}+x}=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\sqrt{X}=0$

donc par composée : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en -1^+

si $x>-1$ (proche de -1) alors $1-x^2>0$

donc $\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{1-x^2}=0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\dfrac{1}{X}=+\infty$

donc par composée : $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$

$f(x)=\cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$ en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)=\pi$ et $\lim_{X\to\pi}\cos X=-1$

donc par composée $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\pi$

$f(x)=\cos\left(\frac{1}{e^x}\right)$ en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ et $\lim_{X\to 0}\cos X=1$ donc par composée $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

$f(x)=e^{\frac{-2}{x+3}}$ en -3^+ et -3^-

$\lim_{x\to-3^-}\frac{-2}{x+3}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ donc par composée $\lim_{x\to-3^-} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-3^+}\frac{-2}{x+3}=-\infty$ et $\lim_{X\to-\infty}e^X=0$ donc par composée $\lim_{x\to-3^+} f(x)=0$

$f(x)=\sqrt{e^{-x+4}}$ en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(4-x)=-\infty$ or $\lim_{X\to-\infty}e^X=0$ donc par composée $\lim_{x\to+\infty}e^{4-x}=0^+$

de plus $\lim_{X\to 0^+}\sqrt{X}=0$ donc par composée $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Ex 3 : $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

dérivée : $f'(x)=\frac{(2x-3)(x+1)-x^2+3x-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$

points critiques : $f'(x)=0$ donne $x^2+2x-4=0$

$\Delta=18>0$ donc $x_1=\frac{-2-\sqrt{20}}{2}=-1-\sqrt{5}$ et $x_2=-1+\sqrt{5}$

signe de la dérivée : x^2+2x-4 est négatif entre x_1 et x_2 pour $x\neq-1$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	-9,5	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	-0,5	↗	$+\infty$

Limites : $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}=\frac{x-3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

or $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-3+\frac{1}{x}\right)=\pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

asymptotes :

$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$

donc $f(x)=\frac{(a)x^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1}$; par identification on obtient

$\begin{cases}a=1\\a+b=-3\\b+c=1\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=1\\b=-4\\-4+c=1\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=5\end{cases}$

donc $f(x)=x-4+\frac{5}{x+1}$ donc $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x-4)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{1+x}=0$

donc la droite (d) d'équation $y=x-4$ est une asymptote oblique à la courbe C_f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$

de plus la droite (d') d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à C_f