Exercice 7

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 2+2i\sqrt{3}$
2) $z_2 = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
3) $z_3 = 4-4i$
4) $z_4 = -\dfrac{1}{4}+\dfrac{i\sqrt{3}}{4}$
5) $z_5 = -2i$
6) $z_6 = \dfrac{4}{1-i}$

Exercice 10

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1-i$

1) Donner le module et un argument de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$
2) Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$
3) En déduire que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 11

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

1) $z_1 = 2\sqrt{3}+6i$
2) $z_2 = (1+i\sqrt{3})^4$
3) $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

Exercice 13

1) a) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ à l'aide de la formule de Moivre et du développement de $(a+b)^3$.

   b) En déduire que : $\cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$ et $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.

2) Retrouver ces deux formules à l'aide des formules d'Euler.

Exercice 16

Soit les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ tels que : $a = 1+\dfrac{3}{4}i$, $b = 2-\dfrac{5}{4}i$, $c = 3+\dfrac{7}{4}i$.

1) Placer les points A, B et C.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3) Calculer l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

Exercice 20

Soit le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2-3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6-i$.

Partie A

1) Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
2) En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, au point $M(z)$ avec $z \neq i$, associe le point $M'(z')$ telle que :

$$z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$$

1) Soit $D(1-i)$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f.
2) a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par f est le point d'affixe $2i$.

   b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3) Démontrer que, pour tout point M distinct de B, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.
4) Démontrer que, pour tout point M distinct de A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

5) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6) Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

Exercice 22

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit $A(2-5i)$ et $B(7-3i)$.

   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z-i| = |z+2i|$.

   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3) Soit $z = 3+i\sqrt{3}$.

   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

4) Soit z un nombre complexe non nul.

   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i+z| = 1+|z|$.