***Ex 1** : La Chaînette & les Ponts suspendus*

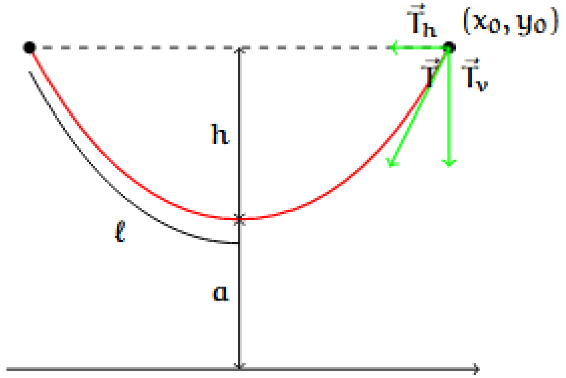
Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation d'une fonction g définie sur $[-1;1]$ par : $g(x)=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$ avec $a>0$; On **montre en *sciences physiques (*)*** que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut que le réel *a* soit une solution strictement positive de l'équation $(E):(x-1)e^{2x}-x-1=0$

Explications (*)

Calcul de la tension totale de la chaînette :

Nous pouvons calculer la tension en un point (x_0,y_0) de la chaînette.

On note h la flèche correspondante et ℓ la longueur entre le point le plus bas (au sol) et le point (x_0,y_0)



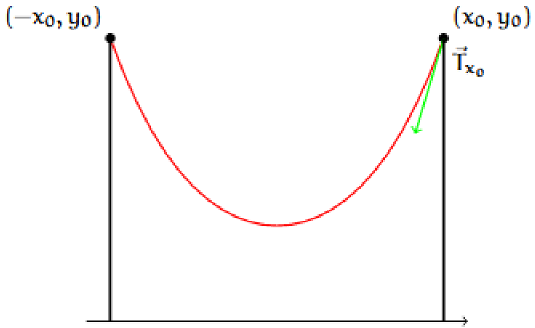
On obtient alors :

- Tension horizontale : $T_h=a\mu g$ où μ est la masse du fil et g est la constante de gravitation
- Tension verticale : $T_v=T_h.sh\left(\dfrac{x_0}{a}\right)$ où $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ et $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ représentent les « *sinus hyperboliques* » & « *cosinus hyperboliques* »
- Tension totale : $T=\sqrt{T_h^2+T_v^2}=\sqrt{T_h^2+T_h^2.sh^2\left(\dfrac{x_0}{a}\right)}=T_h.ch\left(\dfrac{x_0}{a}\right)$

Rque : La fonction « *ch* » étant croissante, on observe que la tension totale augmente si la hauteur du point d'accroche augmente (logique !)

Calcul de la tension totale minimale :

On se donne deux poteaux distants d'une longueur $2x_0$ fixée et d'une hauteur suffisante. Parmi toutes les chaînettes passant par les sommets de ces poteaux, on cherche celle qui a les forces de tensions minimales ;



D'après ce qui précède on obtient :

$T(a)=a\mu g.ch\left(\dfrac{x_0}{a}\right)$

Notre problème, x_0 étant fixé, est de trouver la valeur de *a* qui minimise cette tension totale $T(a)$

Or $T'(a)=\mu g.ch\left(\dfrac{x_0}{a}\right)+a\mu g.\left(\dfrac{-x_0}{a^2}\right).sh\left(\dfrac{x_0}{a}\right)$ car $ch'(x)=sh(x)$

donc $T'(a)=\mu g\left[ch\left(\dfrac{x_0}{a}\right)-\left(\dfrac{x_0}{a}\right).sh\left(\dfrac{x_0}{a}\right)\right]$

on pose alors $\tau=\dfrac{x_0}{a}$ donc $T'(a)=0 \Leftrightarrow ch(\tau)-\tau.sh(\tau)=0$

soit encore $ch(\tau)=\tau\, sh(\tau)$ où τ représente le coefficient de tension

Calcul de la valeur de τ :

on cherche à résoudre l'équation $ch(t)=t.sh(t)$ donc $2ch(t)=2t.sh(t)$

donc $e^t+e^{-t}=t(e^t-e^{-t})$ donc $te^{-t}+e^{-t}=te^t-e^t$ donc $(t-1)e^t=(t+1)e^{-t}$

donc en multipliant par e^t on obtient : $(t-1)e^{2t}=t+1$

Ainsi la valeur de τ est solution de l'équation $(E):(x-1)e^{2x}-x-1=0$

On pose la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)e^{2x}-x-1$

On déduit facilement que $f'(x)=(2x-1)e^{2x}-1$

Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		0,64		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	-2,94	↗	$+\infty$

On cherche ainsi la valeur de $\tau\in[1;2]$ telle que $f(\tau)=0$

Par analyse graphique on déduit que $\tau\simeq1{,}19967864$