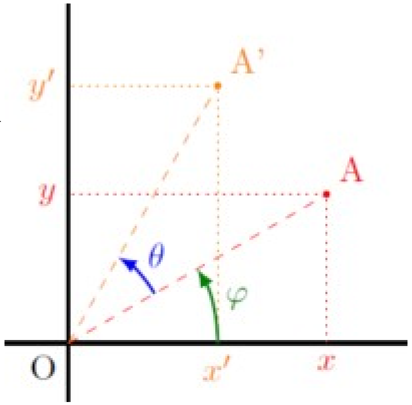
SOS Maths Tale expertes — Matrices de Rotation — Déc 2022

Partie 1 : Image d'un point

Considérons la configuration suivante :



On a $A(x;y), A'(x';y')$ avec $A'=r(A)$ où r est la rotation $r=r(O;\theta)$

On cherche à déterminer x', y' en fonction de x, y, θ

on sait que $\begin{cases} x=OA\cos(\phi) \\ y=OA\sin(\phi) \end{cases}$

et $\begin{cases} x'=OA'\cos(\phi+\theta) \\ y'=OA'\sin(\phi+\theta) \end{cases}$ avec $OA'=OA$

or $\cos(\phi+\theta)=\cos(\phi)\cos(\theta)-\sin(\phi)\sin(\theta)$

et $\sin(\phi+\theta)=\sin(\phi)\cos(\theta)+\sin(\theta)\cos(\phi)$

donc $\begin{cases} x'=x\cos(\theta)-y\sin(\theta) \\ y'=x\sin(\theta)+y\cos(\theta) \end{cases}$ on pose $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

et $\boldsymbol{P=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}$ ainsi $X'=P.X$ en notation matricielle

Partie 2 : Image d'une droite

Considérons une droite (d) d'équation réduite $y=mx+p$. Cherchons une équation cartésienne de l'image (d') de (d) par la rotation de centre O et d'angle θ.

On pose $(d'): ax+by+c=0$ ainsi $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est directeur de (d)

et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur de (d') avec $\|\vec{u}\|=\|\vec{u}'\|$

donc $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{u}'\|^2$ donc $1+m^2=a^2+b^2$ (*)

de même $\vec{u}\cdot\vec{u}'=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}'\|\times\cos(\theta)$ donc $-b+am=(1+m^2)\cos(\theta)$

on substitue la valeur de b dans la relation (*) :

$1+m^2=a^2+(am-(1+m^2)\cos(\theta))^2$

donc $(1+m^2)a^2+(-2m(1+m^2)\cos(\theta))a+(1+m^2)^2\cos^2(\theta)-1-m^2=0$

soit $a^2+(-2m\cos(\theta))a+(1+m^2)\cos(\theta)-1=0$

on calcule le discriminant de cette équation :

$\Delta=4m^2\cos^2(\theta)+4-4(1+m^2)\cos^2(\theta)=4-4\cos^2(\theta)=4\sin^2(\theta)$

donc $a=m\cos(\theta)+|\sin(\theta)|$ ou $a=m\cos(\theta)-|\sin(\theta)|$

posons $a=m\cos(\theta)+|\sin(\theta)|$ donc $b=m|\sin(\theta)|-\cos(\theta)$

l'équation de la droite (d') est donc :

$\boldsymbol{(m\cos(\theta)+|\sin(\theta)|)x+(m|\sin(\theta)|-\cos(\theta))y+c=0}$ (**)

posons $A(0;p)\in(d)$ donc $A'=r(A)\in(d')$

or d'après la Partie 1 on obtient : $\begin{cases} x_A'=x_A\cos(\theta)-y_A\sin(\theta) \\ y_A'=x_A\sin(\theta)+y_A\cos(\theta) \end{cases}$

soit $\begin{cases} x_A'=0\times\cos(\theta)-p\times\sin(\theta)=-p\sin(\theta) \\ y_A'=0\times\sin(\theta)+p\times\cos(\theta)=p\cos(\theta) \end{cases}$

on remplace alors les coordonnées de A' dans la relation (**)

$(m\cos(\theta)+|\sin(\theta)|)(-p\sin(\theta))+(m|\sin(\theta)|-\cos(\theta))(p\cos(\theta))+c=0$

on déduit : $\boldsymbol{c=p\sin(\theta)(m\cos(\theta)+|\sin(\theta)|)-p\cos(\theta)(m|\sin(\theta)|-\cos(\theta))}$

Avec un <u>programme PYTHON</u> on obtient la figure ci-dessous avec $(d): y=x+1$ et $\theta=90°$