Tale spe **SOS Maths – Fonctions – *Corrigé*** **Déc 2022**

Ex 1 :

1) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{1-x}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

dérivée : $f'(x)=\dfrac{(2x)(1-x)-(-1)(x^2+3)}{(1-x)^2}=\dfrac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$

points critiques : $f'(x)=0$ donne $-x^2+2x+3=0$ et $x\neq 1$
$\Delta=16>0$ alors $x_1=-1$ et $x_2=3$

signe de la dérivée : $(1-x)^2>0$ et $-x^2+2x+3$ est positif entre -1 et 3

Tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	-9	↗	$+\infty$

Limites : $f(x)=\dfrac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)}=x.\dfrac{1+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{3}{x^2})=1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{x}-1)=-1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}\right)=-1$

et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x)=\pm\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

asymptotes : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{1-x}=ax+b+\dfrac{c}{1-x}=\dfrac{(ax+b)(1-x)+c}{1-x}$

donc $f(x)=\dfrac{(-a)x^2+(a-b)x+(b+c)}{1-x}$; par identification on obtient

$\begin{cases}-a=1\\ a-b=0\\ b+c=3\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=-1\\ -1-b=0\\ b+c=3\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=-1\\ b=-1\\ -1+c=3\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=-1\\ b=-1\\ c=4\end{cases}$

donc $f(x)=-x-1+\dfrac{4}{1-x}$

or $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(-x-1))=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{1-x}=0$

donc la droite (d) d'équation $y=-x-1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$

de plus la droite (d') d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à C_f

---

2) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+3)^2}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

dérivée : $f'(x)=\dfrac{(x+3)^2-2(x+2)(x+3)}{(x+3)^4}=\dfrac{(x+3)-2(x+2)}{(x+3)^3}=\dfrac{-x-1}{(x+3)^3}$

points critiques : $f'(x)=0$ donne $-x-1=0$ et $x\neq-3$ donc $x=-1$

signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+3)^3$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	-9	↗	$+\infty$

Limites : $f(x)=\frac{x+2}{(x+3)^2}=\frac{x(1+\frac{2}{x})}{x^2(1+\frac{3}{x})^2}=\frac{1}{x}\times\frac{1+\frac{2}{x}}{(1+\frac{3}{x})^2}$

or $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{2}{x})=1$, $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{3}{x})^2=1$ donc $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{(1+\frac{3}{x})^2}=1$

de plus $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{x})=0$ donc on obtient : $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$

asymptotes :
on déduit alors que la droite (d) d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$

de plus la droite (d') d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale à C_f

---

3) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

dérivée : $f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$

points critiques : $f'(x)=0$ donne $x^2=0$ ou $x^2+3=0$ donc $x=0$

signe de la dérivée : $x^2\geqslant 0$, $x^2+3>0$ et $(x^2+1)^2>0$ donc $f'(x)\geqslant 0$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	-9	↗ $+\infty$

Limites : $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{x^3}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=\frac{x}{1+\frac{1}{x^2}}$

or $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x^2})=1$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x)=\pm\infty$ donc $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$

asymptotes : $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}=ax+b+\frac{c}{x^2+1}=\frac{(ax+b)(x^2+1)+c}{x^2+1}$

donc $f(x)=\frac{(a)x^3+(b)x^2+(a)x+(b+c)}{x^2+1}$; par identification on obtient

$\begin{cases} a=1 \\ a=0 \\ b+c=0 \end{cases}$ cela est impossible ! Donc C_f n'admet aucune asymptote oblique

---

4) $f(x)=\frac{3-5e^x}{1+2e^x}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

dérivée : $f'(x)=\frac{-5e^x(1+2e^x)-2e^x(3-5e^x)}{(1+2e^x)^2}=\frac{-11e^x}{(1+2e^x)^2}$

points critiques : $f'(x)=0$ donne $-11e^x=0$ cela est impossible !

signe de la dérivée : $e^x>0$ et $(1+2e^x)^2>0$ donc $f'(x)<0$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	-9	↗ $+\infty$

Limites : $f(x)=\frac{3-5e^x}{1+2e^x}$ *et* $f(x)=\frac{3e^{-x}-5}{e^{-x}+2}$

or $\lim_{x\to-\infty}(3-5e^x)=3$, $\lim_{x\to-\infty}(1+2e^x)=1$ donc $\lim_{x\to-\infty}(f(x))=3$

de même $\lim_{x\to+\infty}(3e^{-x}-5)=-5$ et $\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+2)=2$ donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x))=-2{,}5$

asymptotes :
on déduit alors que la droite (d) d'équation $y=3$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

de même la droite (d) d'équation $y=-2{,}5$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Ex 2** : **Limites de fonctions

a) $f(x)=\sqrt{-x^3+x^2+x}$ en $-\infty$

$f(x)=\sqrt{x^2(-x+1+\frac{1}{x})}=|x|.\sqrt{-x+1+\frac{1}{x}}$; $\lim_{-\infty}|x|=+\infty$

et $\lim_{-\infty}(-x+1+\frac{1}{x})=+\infty$ or $\lim_{+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc par produit $\lim_{-\infty}f(x)=+\infty$

b) $f(x)=e^{5-2x^2}$ en $+\infty$; $\lim_{+\infty}(5-2x^2)=-\infty$ et $\lim_{-\infty}e^X=0$
donc par composition $\lim_{+\infty}f(x)=0$

c) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$ en $-\infty$; $\lim_{-\infty}(\frac{1-x}{1+x^2})=\lim_{-\infty}(\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+x})=0^+$ et $\lim_{X\to0^+}\sqrt{X}=0$

donc par composition $\lim_{-\infty}f(x)=0$

d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en -1+ ; $\lim_{x\to-1^+}\sqrt{1-x^2}=0^+$ et $\lim_{X\to0^+}\frac{1}{X}=+\infty$

donc par compsition $\lim_{x\to-1^+}\sqrt{1-x^2}=0^+$

e) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$ en $+\infty$; $\lim_{+\infty}(\frac{\pi x+1}{x+2})=\lim_{+\infty}(\frac{\pi+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}})=\pi$

or $\lim_{X\to\pi}\cos(X)=-1$ donc par compsition $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$

f) $f(x)=\cos\left(\frac{1}{e^x}\right)$ en $+\infty$: $\lim_{+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ et $\lim_{X\to0}\cos(X)=1$
donc par compsition $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$

g) $f(x)=e^{\frac{-2}{x+3}}$ en $-\infty$ et $+\infty$; $\lim_{-\infty}\frac{-2}{x+3}=0$ et $\lim_{X\to0}e^X=1$
donc par compsition $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$ de même $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$

h) $f(x)=\sqrt{e^{4-x}}$ en $+\infty$; $\lim_{+\infty}(4-x)=-\infty$ et $\lim_{X\to-\infty}e^X=0^+$ et
$\lim_{X\to0^+}\sqrt{X}=0$ donc par compsition $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

Ex 3 : $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$; f est définie et dérivable sur ℝ \{-1}

dérivée : $f'(x)=\frac{(2x-3)(x+1)-x^2+3x-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$

points critiques : $f'(x)=0$ donne $x^2+2x-4=0$

$\Delta=18>0$ donc $x_1=\frac{-2-\sqrt{20}}{2}=-1-\sqrt{5}$ et $x_2=-1+\sqrt{5}$

signe de la dérivée : x^2+2x-4 est négatif entre x_1 et x_2 pour $x\neq-1$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Limites : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x+1}=\dfrac{x-3+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$

or $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-3+\dfrac{1}{x})=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\dfrac{1}{x})=1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$

asymptotes :

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

donc $f(x)=\dfrac{(a)x^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1}$; par identification on obtient

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=-3 \\ b+c=1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ -4+c=1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=5 \end{cases}$$

donc $f(x)=x-4+\dfrac{5}{x+1}$

ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(x-4))=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{5}{x+1})=0$

Donc la droite $(d): y=x-4$ est asymptote oblique à C_f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$