Tale spé SOS Maths – Probabilités - *Corrigé* 15/12/2022

Si on note les évènements :

B : « le cube est bleu »

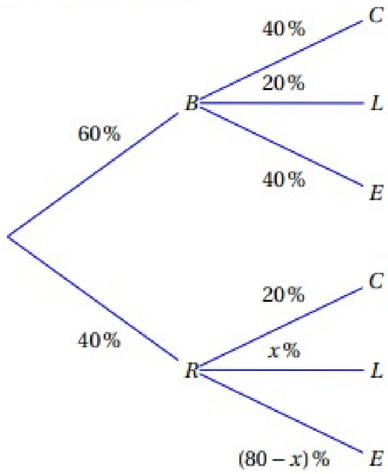
R : « le cube est rouge »

C : « le cube a ses faces marquées d'un cercle »

L : « le cube a ses faces marqués d'un losange »

E : « le cube a ses faces marquées d'une étoile ».

On a l'arbre suivant :



PARTIE A expérience 1

1. La probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à :
$60\,\% \times 20\,\% + 40\,\% \times x\,\% = 0,6\times 0,2 + 0,4\times \dfrac{x}{100} = 0,12 + 0,004x$.

2. Notons $P(L)$ la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange et $P(E)$ celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

$$\begin{aligned} P(L)=P(E) &\iff 0,12+0,004x = 0,6\times 0,4 + 0,4\times\frac{80-x}{100}\\ &\iff 0,12+0,004x = 0,24+0,32-0,004x\\ &\iff 0,008x = 0,44\\ &\iff x = 55\end{aligned}$$

La probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile pour $x = 55$.

3. Les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » sont indépendants équivaut à $P_B(L) = P(L) = P_R(L)$ soit pour $x = 20$.

4. Dans cette question que $x = 50$. $P_L(B) = \dfrac{P(L\cap B)}{P(L)} = \dfrac{0,6\times 0,2}{0,12+0,004\times 50} = \dfrac{0,12}{0,32} = 0,375$
La probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est donc 0,375.

PARTIE B expérience 2

1. La probabilité de ne tirer aucun cube rouge est :

$$\frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{\frac{60!}{57!3!}}{\frac{100!}{97!3!}} = \frac{60\times 59\times 58}{100\times 99\times 98} = \frac{3\times 20\times 59\times 2\times 29}{5\times 20\times 3\times 3\times 11\times 2\times 49} = \frac{1711}{8085} \simeq 0,212$$

La probabilité de tirer au moins un cube rouge est donc $1 - \dfrac{1711}{8085} = \dfrac{6374}{8085} \simeq 0,788$.

2. D'après les calculs précédents la probabilité que les trois cubes soient bleus est $\dfrac{1711}{8085}$.
La probabilité que les trois cubes soient rouges est :

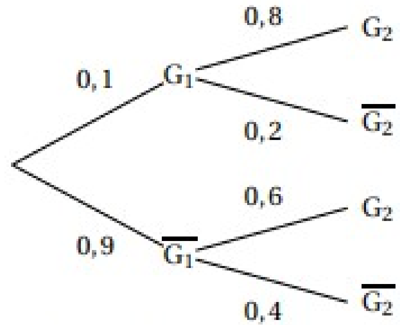
$$\frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{\frac{40!}{37!3!}}{\frac{100!}{97!3!}} = \frac{40\times 39\times 38}{100\times 99\times 98} = \frac{2\times 20\times 3\times 13\times 2\times 19}{5\times 20\times 3\times 3\times 11\times 2\times 49} = \frac{494}{8085} \simeq 0,061.$$

La probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur est donc $\dfrac{1711}{8085} + \dfrac{494}{8085} = \dfrac{2205}{8085} \simeq 0,273$

3. Il y a 32 cubes marqués d'un cercle donc la probabilité d'avoir tiré exactement un cube marqué d'un cercle est $\dfrac{\binom{32}{1}\times\binom{68}{2}}{\binom{100}{3}} = \dfrac{\frac{32\times 68\times 67}{2}}{\frac{100\times 99\times 98}{6}} = \dfrac{2^7\times 17\times 67\times 3}{2^3\times 3^2\times 5^2\times 7^2\times 11} = \dfrac{54672}{121275} \simeq 0,4508.$
La probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle est environ 0,451 au millième près.

---

1. On a l'arbre pondéré suivant :

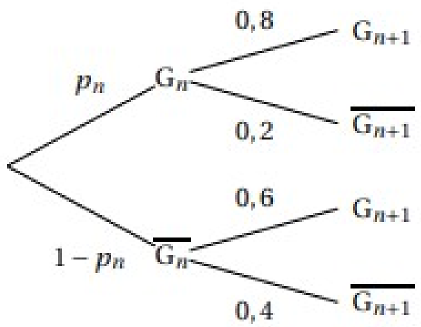


2. On a $p_2 = p(G_1\cap G_2) + p\left(\overline{G_1}\cap G_2\right) = p(G_1)\times p_{G_1}(G_2) + p\left(\overline{G_1}\right)\times p_{\overline{G_1}}(G_2) =$
$0,1\times 0,8 + 0,9\times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$.

3. Il faut trouver $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right) = \dfrac{p\left(\overline{G_1}\cap G_2\right)}{p(G_2)} = \dfrac{0,54}{0,62} = \dfrac{27}{31}$.

4. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0,9\times 0,4\times 0,4 = 0,144$.
La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à
$1 - 0,144 = 0,856$.

5. À la partie n, on a l'arbre suivant :



On a donc $p_{n+1} = p\left(G_n \cap G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) = p\left(G_n\right) \times p_{G_n}\left(G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n}\right) \times p_{\overline{G_n}}\left(G_{n+1}\right) = p_n \times 0,8 + \left(1-p_n\right) \times 0,6 = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6 = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

6. *Initialisation* On a bien $\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{20} = \dfrac{15-13}{20} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1 = p_1$.

Hérédité

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ tel que $p_a = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^a$.

D'après la formule démontrée à la question 4 :

$p_{a+1} = \dfrac{1}{5}p_a + \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^a\right] + \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1} = \dfrac{3}{20} + \dfrac{12}{20} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1}$. La propriété est vraie au rang $a+1$.

On a donc démontré par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

7. Comme $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

8. On a : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \iff \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right) < 10^{-7} \iff \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \iff \left(\dfrac{1}{5}\right)^n < \dfrac{4}{13} \times 10^{-7} \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien)

$n\ln\left(\dfrac{1}{5}\right) < \ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right) \iff n > \dfrac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$.

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \approx 10,7$.

Donc u_{11} approche la limite $\dfrac{3}{4}$ à moins de 10^{-7}.