

Bac Blanc Terminale spé – Session 2023 – Lycée Fresnel

Ex 1 : Fonctions Exponentielles – 5 pts

Soit f la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$;

1) Étude d'une fonction auxiliaire g

- Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 e^x - 1$.
Étudier le sens de variation de g et calculer la limite de g en $+\infty$.
- En déduire le tableau de variation de g sur $]0; +\infty[$.
- Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $]0; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
Donner une valeur approchée de a à 10^{-3} près.
- Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

2) Étude de la fonction f

- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$.
- Démontrer que f admet pour minimum le nombre réel $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$.
- Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Ex 2 : Probabilités – 5 pts

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test)
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test)

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans la population

On note les événements :

- V : « la personne est contaminée »
- T : « le test est positif »

\bar{V} et \bar{T} désignent les événements contraires de V et T .

- Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$ et $P_T(\bar{T})$.
Traduire la situation par un arbre de probabilités.
 - En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.
- Démontrer que le test soit positif est 0,0492.
- Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
 - Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

- Justifier que X suit la loi binomiale dont on donnera les paramètres.
- Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes contaminées parmi les 10.

Ex 3 : Option maths expertes – Complexes – 5 pts

On se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm
Soient A, B, D les points d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 4$, $z_D = 2 + 2i$

- Réaliser une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\frac{z-4}{z} = i$.
 - Déterminer la forme algébrique du quotient $\frac{z_D - z_B}{z_D - z_O}$.
 - En déduire la nature du triangle ODB .
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ puis déterminer la forme exponentielle des solutions.
 - Soient E et F les points d'affixes respectives $z_E = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_F = 1 + i\sqrt{3}$
Quelle est la nature du quadrilatère $O E A F$?
 - Soit (\mathcal{C}) le cercle de centre A et de rayon 2 cm; Démontrer que les points E et F appartiennent à (\mathcal{C}) .
 - Soit E' le point d'affixe $z_{E'} = i z_E$; Démontrer que les points E, E', D sont alignés.
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z\bar{z} + 4z = 8i$.
 - Soit D' le point d'affixe $z_{D'} = -2 + 2i$; Démontrer que la droite $(D'E')$ est perpendiculaire à la droite (DE) .
(On pourra utiliser l'égalité $z_{D'} = i z_D$ pour ceux qui sont astucieux...)

Ex 4 : Option maths expertes – Complexes – 3 pts

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct.

On considère l'équation $(E): z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$

- Donner une solution entière de (E) notée z_0
- En déduire une factorisation du type $(z - z_0)(z^3 + a z^2 + b z + c) = 0$
- Montrer que $(E): (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = 0$
- En déduire toutes les solutions de (E) dans \mathbb{C}
- Les solutions de l'équation (E) (sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que $ABCD$ est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ? Justifier.