**SOS Maths Tale — Suites Numériques — Janv 2023**

***Ex 1 :***

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}, n\geqslant 0$

Pour tout $x\geqslant 0$, on pose $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$

1) a) Calculer $u_1, u_2, u_3$ et émettre des conjectures pour $(u_n)$
   b) Étudier les variations de $f$ sur $[0;+\infty[$
   c) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n>1$

2) a) Établir que pour tout entier $n$ : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+3}$
   b) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$

3) Montrer que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite $L$

***Ex 2 :***

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n+2$ pour $n\geqslant 0$ et $u_0=0$

1) a) Donner les valeurs approchées de $u_1, u_2, u_3, u_4$
   b) Émettre des conjectures sur la suite $(u_n)$

2) Démontrer par *récurrence* que : $\forall n\in\mathbb{N}: 0\leqslant u_n\leqslant 8$

3) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$

4) a) Démontrer que $(u_n)$ est convergente
   b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ? Justifier

***Ex 3 :***

Démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$


**SOS Maths Tale — Suites Numériques — Janv 2023**

***Ex 1 :***

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}, n\geqslant 0$

Pour tout $x\geqslant 0$, on pose $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$

4) a) Calculer $u_1, u_2, u_3$ et émettre des conjectures pour $(u_n)$
   b) Étudier les variations de $f$ sur $[0;+\infty[$
   c) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n>1$

5) a) Établir que pour tout entier $n$ : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+3}$
   b) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$

6) Montrer que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite $L$

***Ex 2 :***

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n+2$ pour $n\geqslant 0$ et $u_0=0$

1) a) Donner les valeurs approchées de $u_1, u_2, u_3, u_4$
   b) Émettre des conjectures sur la suite $(u_n)$

2) Démontrer par *récurrence* que : $\forall n\in\mathbb{N}: 0\leqslant u_n\leqslant 8$

3) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$

4) a) Démontrer que $(u_n)$ est convergente
   b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ? Justifier

***Ex 3 :***

Démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$