Ex 1 : Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

1) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$
2) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f
3) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$
4) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes à C_f
5) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point A d'abscisse 1

Ex 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\ln(x^2+1)$

Partie A

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$
2) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f
3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=1$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}: 0\leqslant u_n\leqslant 1$
2) Étudier les variations de la suite (u_n)
3) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite L

Ex 3 : *Utilisation d'une fonction auxiliaire – type BAC*

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x+\ln(x)-3$

1) Justifier que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
2) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in[2;3]$ puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près
3) En déduire le signe de $g(x)$

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)+2$

1) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variations de f
2) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$
3) Étudier les positions relatives des courbes C_f et $C_{\ln}$

   → On pourra utiliser l'égalité $f(x)-\ln(x)=\frac{2-\ln x}{x}$ pour $x>0$

Tale spé maths **Études de Fonctions LN** **janv 2023**

Ex 1 : Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

1) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$
2) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f
3) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$
4) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes à C_f
5) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point A d'abscisse 1

Ex 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\ln(x^2+1)$

Partie A

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$
2) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f
3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=1$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}: 0\leqslant u_n\leqslant 1$
2) Étudier les variations de la suite (u_n)
3) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite L

Ex 3 : *Utilisation d'une fonction auxiliaire – type BAC*

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x+\ln(x)-3$

1) Justifier que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
2) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in[2;3]$ puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près
3) En déduire le signe de $g(x)$

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)+2$

1) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variations de f
2) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$
3) Étudier les positions relatives des courbes C_f et $C_{\ln}$

   → On pourra utiliser l'égalité $f(x)-\ln(x)=\frac{2-\ln x}{x}$ pour $x>0$