SOS maths – expertes Arithmétique - *Corrigé* Jeudi 19 janvier 2023

Exercice 1

Divisibilité par 17 **(3 points)**

On a : $16+1\equiv 0\,(17) \;\Leftrightarrow\; 16\equiv -1\,(17)$ et $17+1\equiv 1\,(17) \;\Leftrightarrow\; 18\equiv 1\,(17)$

Par puissance : $16^{2n+1}+18^n\equiv(-1)^{2n+1}+1^n\equiv -1+1\equiv 0\,(17)$.

Donc $16^{2n+1}+18^n$ est divisible par 17.

Exercice 2

Divisibilité par 13 **(6 points)**

1) Par double implication en remarquant que $40\equiv 1\,(13)$

$$n\equiv 0\;(13) \;\Rightarrow\; 10a+b\equiv 0\;(13) \;\overset{\times 4}{\Rightarrow}\; 40a+4b\equiv 0\;(13) \;\overset{40\equiv 1\,(13)}{\Rightarrow}\; a+4b\equiv 0\;(13)$$

Réciproquement :

$$a+4b\equiv 0\;(13) \;\overset{\times 10}{\Rightarrow}\; 10a+40b\equiv 0\;(13) \;\overset{40\equiv 1\,(13)}{\Rightarrow}\; 10a+b\equiv 0\;(13) \;\Rightarrow\; n\equiv 0\;(13).$$

Conclusion : n est divisible par 13 si, et seulement si, $a+4b\equiv 0\;(13)$.

2) "*Un nombre est divisible par 13 si et seulement si, le nombre de ses dizaines augmenté du quadruple du chiffre de ses unités est divisible par 13*".
On peut réitérer le processus si nécessaire.

3) On peut donner les multiples de 13 inférieurs à 100 : 0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91.

On a les décompositions suivantes :

656|7	$656+4\times 7=656+28=68\|4$ $68+4\times 4=68+16=84$	non divisible par 13
666|6	$666+4\times 6=666+24=69\|0$ $69+4\times 0=69$	non divisible par 13
888|8	$888+4\times 8=888+32=92\|0$ $92+4\times 0=92$	non divisible par 13
56955|6	$56955+4\times 6=56955+24=5697\|9$ $5697+4\times 9=56971+36=573\|3$ $573+4\times 3=573+12=58\|5$ $58+4\times 5=58+20=78$	divisible par 13

Exercice 3

Divisibilité par 11 **(3 points)**

On détermine le cycle des restes dans la division de 4^n par 11

$$4^0\equiv 1\,(11),\; 4^1\equiv 4\,(11),\; 4^2\equiv 5\,(11),\; 4^3\equiv 9\,(11),\; 4^4\equiv 3\,(11),\; 4^5\equiv 1\,(11)$$

Le cycle est de 5. On remplit alors un tableau de congruence :

$n\equiv\;(5)$	0	1	2	3	4
$4^n\equiv\;(11)$	1	4	5	9	3
$3\times 4^n\equiv\;(11)$	3	1	4	5	9
$3\times 4^n+2\equiv\;(11)$	5	3	6	7	0

Conclusion : $3\times 4^n+2$ est divisible par 11 si, et seulement si $(n-4)$ est divisible par 5.

Exercice 4

Divisibilité par 7 **(3 points)**

On remplit un tableau de congruence :

$n\equiv\;(7)$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2\equiv\;(7)$	0	1	4	2	2	4	1
$2n\equiv\;(7)$	0	2	4	6	1	3	5
$n^2-2n\equiv\;(7)$	0	6	0	3	1	1	3

Conclusion : n^2-2n est divisible par 7 si, et seulement si n ou $(n-2)$ est divisible par 7.

Exercice 5

Vrai-Faux **(5 points)**

1) **Proposition 1 : Fausse** La multiplication modulo 6 n'est pas intègre, en effet :

$$\text{Si } a\equiv 2\;(6) \text{ et } b\equiv 3\;(6) \text{ alors } ab\equiv 2\times 3\equiv 6\equiv 0\quad(6)$$

2) **Proposition 2 : Fausse** Trouvons un contre exemple :

$$\text{Si } x\equiv 8\;(12) \text{ alors } 2x\equiv 2\times 8\equiv 16\equiv 4\quad(12)$$

.

3) **Proposition 3 : Vraie** Par double implication

$$7-x\equiv 5\;(3) \;\Rightarrow\; -x\equiv -2\;(3) \;\overset{\times(-1)}{\Rightarrow}\; x\equiv 2\;(3).$$

Réciproquement

$$x\equiv 2\;(3) \;\Rightarrow\; 7-x\equiv 7-2\equiv 5\;(3)$$

Exercice 6

1) On pose $D = \text{pgcd}(a, b)$.

   D divise a et b donc D divise toute combinaison linéaire de a et de b donc D divise :

$$5a - 3b = 5(3n + 1) - 3(5n - 1) = 15n + 5 - 15n + 3 = 8$$

   D est donc un diviseur de 8.

2) $\text{pgcd}(a, b) = 8$ si a et b sont des multiples de 8 :

$$\begin{array}{lll}
 & a \equiv 0 \ (8) & \\
 & 3n + 1 \equiv 0 \ (8) & \\
 & 3n \equiv -1 \ (8) & \\
(\times 3) & 9n \equiv -3 \ (8) & \text{or } 9 \equiv 1 \ (8) \\
 & n \equiv -3 \equiv 5 \ (8) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
 & b \equiv 0 \ (8) & \\
 & 5n - 1 \equiv 0 \ (8) & \\
 & 5n \equiv 1 \ (8) & \\
(\times 5) & 25n \equiv 5 \ (8) & \text{or } 25 \equiv 1 \ (8) \\
 & n \equiv 5 \ (8) &
\end{array}$$

   $\text{pgcd}(a, b) = 8$ si $n \equiv 5 \ (8)$.