Exercice 1

Fonction ln **(10 points)**

Partie A : fonction auxiliaire g

1) $g(1) = 0$ et $g(e) = e - 2$.

2) Limite en $+\infty$: $g(x) = 2x - x\ln x - 2 = x(2 - \ln x) - 2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \ln x = -\infty\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x(2-\ln x) = -\infty\end{array} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

Limite en 0^+ : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} 2(x-1) = -2 \\ \lim\limits_{x\to0^+} -x\ln x = 0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -2\end{array}$

3) $g'(x) = 2 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = 1 - \ln x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

4) a) On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$			0	$-$	
$g(x)$	‖	-2 ↗	0	↗	$e-2$	↘	$-\infty$

Sur $]0\,;e[$, la fonction g est monotone (croissante) et $g(1) = 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution 1.

sur $[e\,;+\infty[$, la fonction g est continue car dérivable, monotone (décroissante) et change de signe car $g(e) = e - 2 \approx 0,718$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ donc d'après le TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) $g(6) = -0,751$ donc $\alpha \in [e\,; 6]$.

Par l'algorithme de dichotomie, on trouve : $4,921 \leqslant \alpha \leqslant 4,922$.

5) On obtient le tableau de signe suivant :

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B : étude de la fonction principale

1) Limites en $+\infty$: $f(x) = x(3 - \ln x) - 2\ln x$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \ln x = -\infty\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x(2-\ln x) = -\infty\end{array} \quad \lim_{x\to+\infty} -2\ln x = -\infty \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Limite en 0^+ : $\lim\limits_{x\to0^+} 3x = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} -x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} -2\ln x = +\infty$

par somme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

2) a) $f'(x) = 3 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x} = 2 * \ln x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x - x\ln x - 2}{x} = \dfrac{2(x-1) - x\ln x}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$

b) D'après la question 5) de la partie A, on a : avec $f(\alpha) \approx 3,734$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

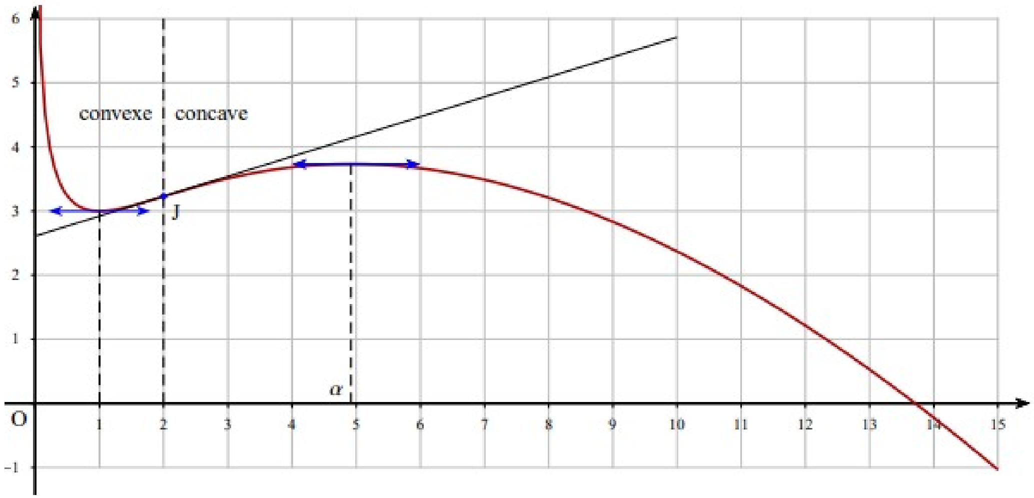
3) a) $f''(x) = \dfrac{g'(x) \times x - g(x)}{x^2} = \dfrac{x - x\ln x - 2x + 2 + x\ln x}{x^2} = \dfrac{2-x}{x^2}$.

b) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et signe de $f''(x)$ = signe de $(2 - x)$.

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	convexe	0	concave	

$\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion J(2 ; 6−4 ln 2) car la dérivée seconde s'annule en 2 et change de signe.

4) On obtient la courbe suivante :



Exercice 2

Fonction exponentielle et suite **(10 points)**

Partie A : Étude d'une fonction

1) Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x = 0$ (limite de référence).

2) $f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(3+x)$.

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$ et signe de $f'(x) \overset{x^2\geqslant 0}{=}$ signe de $(3+x)$.

   Remarque : $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en 0 car $f'(x) = 0$ et ne change pas de signe.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-27\,e^{-3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) Soit $g(x) = f(x) - x$ on a $g(0,5) = -0,294$ et $g(1) \approx 1,718$ donc $\alpha \in [0,5\,;\,1]$.

   Par l'algorithme de dichotomie, on trouve : $0,703 \leqslant \alpha \leqslant 0,704$.

Partie B : Étude d'une suite

1) $u_1 = -e^{-1} \approx -0,368$ et $u_2 = (-e^{-1})^3e^{-e^{-1}} = -e^{-3}e^{-\frac{1}{e}} \approx -0,034$

2) On retrouve le résultat trouvé précédemment $u(2) \approx -0,034$.

3) **Initialisation :** $n = 0$ $u_0 = -1$ et $u_1 \approx -0,368$ on a donc $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 0$.

   La proposition est initialisée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$,

   montrons que $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$.

   HR : $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,5$, comme la fonction f est croissante sur $[-1\,;\,0]$ on a

   $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(0) \Rightarrow -0,368 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0 \Rightarrow$

   $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$. La proposition est héréditaire.

   Par initialisation et hérédité, on a : $\forall x \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

4) La suite (u_n) est croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 0, d'après le théorème des suites monotone, la suite u_n converge vers $\ell \leqslant 0$.

5) La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ, comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

   $f(x) = x \Leftrightarrow x^3e^x = x \Leftrightarrow x(x^2e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2e^x - 1 = 0$

   Comme $\ell \leqslant 0$ et que la solution de $x^2e^x - 1 = 0$ est supérieur à 0,5, la seule solution acceptable est $x = 0$. La suite (u_n) converge vers $\ell = 0$.