Formulaire : Trigonométrie

Toutes le formules de trigo se retrouvent à partir de l'exponentielle complexe et des règles de calcul sur les puissances. Il faut impérativement savoir que **ces formules existent** et **savoir les retrouver rapidement**.

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$

On est sur le cercle de rayon 1, d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\
\sin(a+b) &= \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) \\
\tan(a+b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}
\end{aligned}$$

En développant $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$, puis en identifiant partie réelle et partie imaginaires.

En combinant les deux formules précédentes.

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) &&= \frac{1 - \tan^2(a)}{1 + \tan^2(a)} \\
\sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) &&= \frac{2\tan(a)}{1 + \tan^2(a)} \\
\tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\cos(a)\cos(b) &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\
2\sin(a)\sin(b) &= -\cos(a+b) + \cos(a-b) \\
2\sin(a)\cos(b) &= \sin(a+b) + \sin(a-b)
\end{aligned}$$

$\cos(a)\cos(b) = \Re\Big(e^{ia}\cos(b)\Big) = \Re\Big(e^{ia}\dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\Big)$ puis la linéarité de la partie réelle. Etc...

$$\begin{aligned}
\cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
-\cos(p) + \cos(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Les mêmes que les précédentes, mais dans l'autre sens. Avec $p = a + b$ et $q = a - b$.

En trigonométrie hyperbolique, on suit la même démarche, souvent seuls quelques signes changent devant les sh .

$$\boxed{e^x = \mathrm{ch}\ x + \mathrm{sh}\ x}$$

$$\mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\mathrm{ch}^2(a) - \mathrm{sh}^2(a) = 1$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,(a+b) &= \mathrm{ch}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{sh}\,(b)\\
\mathrm{sh}\,(a+b) &= \mathrm{ch}\,(a)\,\mathrm{sh}\,(b) + \mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b)\\
\mathrm{th}\,(a+b) &= \frac{\mathrm{th}\,(a) + \mathrm{th}\,(b)}{1 + \mathrm{th}\,(a)\,\mathrm{th}\,(b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,(2a) &= \mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a) = 2\,\mathrm{ch}^2(a) - 1 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2(a) &&= \frac{1 + \mathrm{th}^2(a)}{1 - \mathrm{th}^2(a)}\\
\mathrm{sh}\,(2a) &= 2\,\mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(a) &&= \frac{2\,\mathrm{th}\,(a)}{1 - \mathrm{th}^2(a)}\\
\mathrm{th}\,(2a) &= \frac{2\,\mathrm{th}\,(a)}{1 + \mathrm{th}^2(a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{ch}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) &= \mathrm{ch}\,(a+b) + \mathrm{ch}\,(a-b)\\
2\,\mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{sh}\,(b) &= \mathrm{ch}\,(a+b) - \mathrm{ch}\,(a-b)\\
2\,\mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) &= \mathrm{sh}\,(a+b) + \mathrm{sh}\,(a-b)
\end{aligned}$$

Se retrouve à partir des formules de $\mathrm{ch}\,(a+b)$, $\mathrm{ch}\,(a-b)$, etc. Ou en prenant les parties paires et impaire, sur le modèle de $\Re$ et $\Im$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,(p) + \mathrm{ch}\,(q) &= 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\mathrm{ch}\,(p) - \mathrm{ch}\,(q) &= 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\mathrm{sh}\,(p) + \mathrm{sh}\,(q) &= 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Les mêmes que les précédentes, mais dans l'autre sens. Avec $p = a + b$ et $q = a - b$.