En vrac

1 Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si possible de tête :

1) $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$.
2) $\dfrac{4^n 3^{2n} - 1}{2^n 3^n + 1}$. 3) $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$. 4) $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$.
5) $\dfrac{16^{n+1}}{3} + \dfrac{(-4)^{2n+1}}{5} + \dfrac{(-2)^{4n}}{6}$.

2 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer $\max\{x, y\}$ et $\min\{x, y\}$ en fonction de x, y et $|x-y|$. On pourra commencer par calculer leur somme et leur différence.

5 Montrer que que pour tout $x \in [0,2] \setminus \{1\}$:

$$\left|\frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2}\right| \leqslant 2.$$

Équations, inéquations

6 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1) $|4 - x| = x$. 2) $\left|x^2 + x - 3\right| = |x|$.
3) $|x+2| + |3x-1| = 4$. 4) $\sqrt{1-2x} = |x+7|$.
5) $x\,|x| = 3x + 2$. 6) $x + 5 = \sqrt{x+11}$.

7 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

1) $\left|x^2 - 6x + 4\right| \leqslant 1$. 2) $x + 2 < |2x - 5|$.
3) $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{x+2}{x+3}$. 4) $|3x-5| \leqslant |2x+3|$.
5) $|x-1| \leqslant |2x+1| + 1$. 6) $x + 3 \leqslant \sqrt{x+5}$.
7) $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1$. 8) $|x+3| > \left|x^2 - 3\right|$.
9) $\sqrt{|x+2|} \leqslant |x - 10|$. 10) $\sqrt{x^2-1} < 2 - x$.

9 Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a$ d'inconnue $x \geqslant 0$.

Inégalités et substitutions

10 Soient $x, y \geqslant 0$.

1) Montrer que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
2) En déduire que si $x \geqslant y$: $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$.
3) En déduire que $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

11

1) Montrer que $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.
2) En déduire que pour tous $x, y > 0$:
$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

12 Soient $a, b, c > 0$ trois réels de somme s.

1) Montrer que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ pour tous $x, y > 0$.
2) En déduire que :
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 6 - s \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{s}.$$
3) Démontrer que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geqslant 3$

13

1) Montrer que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ pour tous $x, y > 0$.
2) En déduire que pour tous $a, b, c > 0$:
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$
À quelle condition a-t-on égalité ?