Ex 1 : Simplification d'écritures :

1) $3^{n+2}-3^{n+1}-7\times3^n+5\times3^{n-1}=9\times3^n-3\times3^n-7\times3^n+0{,}2\times3^n=-0{,}8\times3^n$

2) $\dfrac{4^n.3^{2n}-1}{2^n.3^n+1}=\dfrac{36^n-1}{6^n+1}=6^n-1$

3) $\dfrac{32\times8^{n-1}}{2^{2n+2}-4^n}=\dfrac{4\times8^n}{4\times4^n-4^n}=\dfrac{4\times8^n}{3\times4^n}=\dfrac{4}{3}2^n$

4) $\dfrac{5^n\times12^2}{10^n\times6^4}=\dfrac{12^2\times5^n}{36^2\times10^n}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times0{,}5^n=\dfrac{1}{9}0{,}5^n$

5) $\dfrac{16^{n+1}}{3}+\dfrac{(-4)^{2n+1}}{5}+\dfrac{(-2)^{4n}}{6}=\dfrac{16}{3}16^n-\dfrac{4}{5}16^n+\dfrac{1}{6}16^n=4{,}7\times16^n$

Ex 2 : Max & Min

on a : $min\{x,y\}=\dfrac{1}{2}(x+y-|x-y|)$ et $max\{x,y\}=\dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$

ainsi $|x-y|=max\{x,y\}-min\{x,y\}$ et $x+y=min\{x,y\}+max\{x,y\}$

Ex 5 : majoration d'expression :

on pose $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+\sqrt{x}-2}$, $\forall x\in[0;2]\backslash\{1\}$

ainsi $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-2)}{\sqrt{x}+2}$

or l'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien donc $\sqrt{x}+1\leqslant\sqrt{x}+2$

donc $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\leqslant1$ donc $|f(x)|\leqslant|x-2|\leqslant2$

Ex 6 : Équations & Inéquations

1) $|4-x|=x$ équivaut à $\begin{cases}4-x=x,\ x<4\\ x-4=x,\ x>4\end{cases}$ donc $S=\{2\}$

2) $|x^2+x-3|=|x|$ équivaut à $\begin{cases}x^2+x-3=-x,\ x<x_1\\ -x^2-x+3=-x,\ x_1<x<0\\ -x^2-x+3=x,0<x<x_2\\ x^2+x-3=x,\ x>x_2\end{cases}$

donc $S=\{-3;-\sqrt{3};1;\sqrt{3}\}$ avec $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

3) $|x+2|+|3x-1|=4$ donne avec la même méthode $S=\{-0{,}5;0{,}75\}$

4) $\sqrt{1-2x}=|x+7|$ donne $1-2x=(x+7)^2$ donc $S=\{-12;-4\}$

5) $x.|x|=3x+2$ donne avec la méthode du 2) : $S=\{-2;-1\}$

6) $x+5=\sqrt{x+11}$ donne $x+11=(x+5)^2$ si $x\geqslant-5$ donc $S=\{-2\}$

Ex 7 : Équations & Inéquations

1) $|x^2-6x+4|\leqslant1$ donne $\begin{cases}x^2-6x+4\leqslant1,\ x<x_1\\ -x^2+6x-4\leqslant1,\ x_1<x<x_2\\ x^2-6x+4\leqslant1,x>x_2\end{cases}$

$S=[3-\sqrt{6};1]\cup[5;3+\sqrt{6}]$ avec $x_1=3-\sqrt{5}$, $x_2=3+\sqrt{5}$

2) $x+2<|2x-5|$ donne avec la méthode précédente $S=]1;7[$

3) $\dfrac{x}{x+1}\leqslant\dfrac{x+2}{x+3}$ équivaut à $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}\geqslant0$

donc $S=]-\infty;-3[\cup]-1;+\infty[$

4) $|3x-5|\leqslant|2x+3|$ donne avec la méthode du 1) : $S=[0{,}4;8]$

5) $|x-1|\leqslant|2x+1|+1$ donne avec la méthode précédente

$S=]-\infty;-1[\cup]-\dfrac{1}{3};+\infty[$

6) $x+3\leqslant\sqrt{x+5}$ donne $(x+3)^2\leqslant x+5$ si $x\geqslant-3$ donc $S=[-3;-1]$

7) $\dfrac{x+5}{x^2-1}\geqslant 1$ donne $\dfrac{-x^2+x+6}{x^2-1}\geqslant 0$
ainsi avec un signes on obtient $S=[-2\,;-1[\cup]1\,;3]$

8) $|x+3|>|x^2-3|$ donne avec la méthode du 1) : $S=]-2\,;-1[\cup]0\,;3[$

9) $\sqrt{|x+2|}\leqslant|x-10|$ donne $\begin{cases}\sqrt{-x-2}\leqslant -x+10\,,\, x<-2\\ \sqrt{x+2}\leqslant -x+10\,,\,-2<x<10\\ \sqrt{x+2}\leqslant x-10,\, x>10\end{cases}$
donc $S=]-\infty\,;7]\cup[14\,;+\infty[$

10) $\sqrt{x^2-1}<2-x$ donne $x^2-1<(2-x)^2$ si $x<2$
donc $S=]-\infty\,;1{,}25[$

Ex 9 : Équation paramétrique

soit $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$; on cherche à résoudre $f(x)=a$ pour tout $a\in\mathbb{R}$

$D_f=[0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$

f est donc strict croissante sur D_f ; ainsi on obtient :

- si $a<1$ alors $f(x)=a$ donne $S=\emptyset$
- si $a=1$ alors $f(x)=a$ donne $S=\{0\}$
- si $a>1$ alors $f(x)=a$ donne $S=\{x_0\}$

Ex 10 : Inégalités & Substitutions

1) on a $(\sqrt{x+y})^2=x+y$ pour $x>0, y>0$ et
$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{x\,y}$ pour $x>0, y>0$
donc $(\sqrt{x+y})^2\leqslant(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$
donc $\sqrt{x+y}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}$ car les termes sont positifs

2) de même $(\sqrt{x-y})^2=x-y$ et $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{x\,y}$
donc $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\leqslant(\sqrt{x-y})^2$
donc $\sqrt{x}-\sqrt{y}\leqslant\sqrt{x-y}$ car $x\geqslant y$

3) si $y\geqslant x$ on a $\sqrt{y}-\sqrt{x}\leqslant\sqrt{y-x}$
ainsi pour tout $x\,,y\in\mathbb{R}$, $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leqslant\sqrt{|x-y|}$

Ex 11 : Inégalités & Substitutions

1) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{x\,y}$ pour $x\geqslant 0, y\geqslant 0$
or $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqslant 0$ donc $x+y-2\sqrt{x\,y}\geqslant 0$
donc $\sqrt{x\,y}\leqslant\dfrac{x+y}{2}$ pour tout $x\geqslant 0, y\geqslant 0$
Rque : on retiendra que $Moy_{geom}(x\,,y)\leqslant Moy_{arith}(x\,,y)$

2) On déduit alors $\sqrt{x^4y^2}\leqslant\dfrac{x^4+y^2}{2}$ et $\sqrt{x^2y^4}\leqslant\dfrac{x^2+y^4}{2}$
donc $x^2y\leqslant\dfrac{x^4+y^2}{2}$ et $x\,y^2\leqslant\dfrac{x^2+y^4}{2}$
donc $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{x\,y^2}{x^2+y^4}\leqslant\dfrac{1}{2}$
donc $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}+\dfrac{x\,y^2}{x^2+y^4}\leqslant 1$ donc $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{x^2+y^4}\leqslant\dfrac{1}{x\,y}$ si $x>0, y>0$

Ex 12 : Inégalités & Substitutions

1) on a $(x-y)^2=x^2+y^2-2\,x\,y$ pour tout $x>0, y>0$
or $(x-y)^2\geqslant 0$ donc $x^2+y^2\geqslant 2\,x\,y$
donc $\dfrac{x^2}{x\,y}+\dfrac{y^2}{x\,y}\geqslant 2$ donc $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$ pour tout $x>0, y>0$

2) a) on pose $s=a+b+c$; on a : $\dfrac{a}{1}+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$, $\dfrac{b}{1}+\dfrac{1}{b}\geqslant 2$, $\dfrac{c}{1}+\dfrac{1}{c}\geqslant 2$
donc $a+b+c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 6$ donc $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 6-s$

b) on pose $s=a+b+c$; on a : $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$, $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\geqslant 2$, $\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\geqslant 2$
donc $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)+\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}\right)\geqslant 6$
donc $\left(\dfrac{a}{a}+\dfrac{b}{b}+\dfrac{c}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)+\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}\right)\geqslant 9$
$\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}\geqslant 9$ donc $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{9}{s}$

3) on utilise la propriété $Moy_{geom}(x, y) \leqslant Moy_{arith}(x, y)$

donc $Moy_{geom}(a, b, c) \leqslant Moy_{arith}(a, b, c)$

donc $Moy_{geom}\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right) \leqslant Moy_{arith}\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$

donc $\left(\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{a}\right)^{1/3} \leqslant \frac{1}{3} \times \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)$

donc $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3 \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{a}\right)^{1/3}$ donc $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$

Ex 13 : Inégalités & Substitutions

1) on sait que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$ pour tout $x < 0, y > 0$ (cf Ex 12)

2) on sait que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{s}$ pour tout $a > 0, b > 0, c > 0$

donc $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}$

donc $((a+b)+(b+c)+(c+a)) \times \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geqslant 9$

$$\left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{a+b}{b+c} + \frac{a+b}{c+a}\right) + \left(\frac{b+c}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{b+c}{c+a}\right) + \left(\frac{c+a}{a+b} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{c+a}{c+a}\right) \geqslant 9$$

donc $\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{a+b}{c+a}\right) + \left(\frac{b+c}{a+b} + \frac{b+c}{c+a}\right) + \left(\frac{c+a}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}\right) \geqslant 6$

donc $\frac{a+b+2c}{a+b} + \frac{b+c+2a}{b+c} + \frac{c+a+2b}{c+a} \geqslant 6$

donc $\frac{2c}{a+b} + \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} \geqslant 3$

donc $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$