

1) Dans les questions qui suivent, les a_k , les z_{ij} et λ sont des nombres complexes quelconques.

1) Sans justification, les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k,$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k, \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| = \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p = \sum_{k=1}^n a_k^p.$$

2) Reprendre la question 1) en remplaçant les sommes par des produits.

3) Transformer $\sum_{k=1}^n \ln a_k$ pour $a_1, \dots, a_n > 0$.

4) Est-il vrai que : $\prod_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij} = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m z_{ij}$?

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1) \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

$$2) \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

4)

1) Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 2$.

2) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Que dire de sa limite ?

SOMMES

2)

Simplifier les sommes suivantes :

$$1) \sum_{i=0}^n i(i-1). \quad 2) \sum_{j=1}^n (2j-1). \quad 3) \sum_{k=1}^n (-1)^k.$$

$$4) \sum_{k=0}^n (k+n). \quad 5) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}. \quad 6) \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right).$$

$$7) \sum_{k=0}^n \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \text{ en écrivant les termes som-}$$

més sous la forme $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ avec $a, b > 0$.

$$8) \sum_{1 \leq i < j \leq n} i. \quad 9) \sum_{1 \leq i < j \leq n} j. \quad 10) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j).$$

$$11) \sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j}. \quad 12) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}. \quad 13) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j-i).$$

$$14) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j}. \quad 15) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2. \quad 16) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max\{i, j\}.$$

PRODUITS

10)

Simplifier les produits suivants en les exprimant le plus possible à l'aide de puissances et de factorielles :

$$1) \prod_{k=1}^n \sqrt{k(k+1)}. \quad 2) \prod_{k=1}^n (-5)^{k^2-k}. \quad 3) \prod_{k=1}^n \frac{4^k}{k^2}.$$

$$4) \prod_{k=0}^n (2k+1). \quad 5) \prod_{k=1}^n (4k^2-1). \quad 6) \prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}.$$

$$7) \prod_{1 \leq i, j \leq n} (2i). \quad 8) \prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j. \quad 9) \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij.$$

$$10) \prod_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^p 2^{pk}.$$