Ex 1 : (*) - *VRAI ou FAUX (en justifiant)*

Ces différentes propriétés sont à retenir pour les Colles & DS

1) a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}(a_k)+\sum_{k=1}^{n}(b_k)$ par linéarité de la somme

b) $\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k)=\lambda.\sum_{k=1}^{n}(a_k)$ par linéarité de la somme

c) $\sum_{k=1}^{n}(a_k\times b_k)\neq\sum_{k=1}^{n}(a_k)\times\sum_{k=1}^{n}(b_k)$ avec $a_k=k$ et $b_k=\frac{1}{k}$

d) $\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k)\right|\neq\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ d'après l'inégalité triangulaire

e) $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)\right)^p\neq\sum_{k=1}^{n}a_k^p$ d'après l'identité remarquable généralisée

2) a) $\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\neq\prod_{k=1}^{n}(a_k)+\prod_{k=1}^{n}(b_k)$ par distributivité de la somme sur le produit

b) $\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k)=\lambda^n.\prod_{k=1}^{n}(a_k)$ par propriété élémentaire

c) $\prod_{k=1}^{n}(a_k\times b_k)=\prod_{k=1}^{n}(a_k)\times\prod_{k=1}^{n}(b_k)$ par propriété élémentaire

d) $\left|\prod_{k=1}^{n}(a_k)\right|=\prod_{k=1}^{n}|a_k|$ par propriété élémentaire

e) $\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k)\right)^p=\prod_{k=1}^{n}a_k^p$ par propriété élémentaire

3) $\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)$ pour $a_{1,}a_{2,}a_{3,}\cdots,a_n>0$

4) $\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}z_{ij}\neq\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}z_{ij}$ par distributivité de la somme sur le produit (à vérifier sur des exemples simples)

Ex 3 : (*) - *Calculs de Sommes élémentaires*

1) $$\sum_{k=0}^{n}k^3=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2+\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2-\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)^2+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)^2-\left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)^2+\left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)^2-\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{3\times2}{2}\right)^2-\left(\frac{2\times1}{2}\right)^2+\left(\frac{2\times1}{2}\right)^2-\left(\frac{1\times0}{2}\right)^2+\left(\frac{1\times0}{2}\right)^2-\left(\frac{0\times(-1)}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$ (une variante de la preuve par récurrence de T^{ale})

2) de la même façon on applique le principe des « sommes télescopiques »

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2=(0^2-1^2)+(2^2-3^2)+(4^2-5^2)+\cdots+((n-1)^2-n^2)\quad (n=2p+1)$$

$$=(-1)\times1+(-1)\times5+(-1)\times9+\cdots+(-1)\times(2n-1)$$

$$=(-1)\times(1+4+9+\cdots+(4p+1))$$

$$=(-1)\times\left(\frac{1+4p+1}{2}\right)\times(p+1)$$

$$=(-1)\times(2p+1)\times(p+1)=-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

de même on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2=(0^2)+(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\cdots+(n^2-(n-1)^2)\quad (n=2p)$$

$$=(1)\times3+(1)\times7+(1)\times11+\cdots+(1)\times(4p-1)$$

$$=(1)\times\left(\frac{3+4p-1}{2}\right)\times(p)$$

$$=(1)\times(2p+1)\times(p)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

ainsi dans tous les , selon la parité de n, on déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k^2=(-1)^n.\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\quad,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

Ex 4 : (**) - *Étude de la série de Riemann*

1) Soit k un entier naturel tel que $k \geqslant 2$; alors on a :
$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k(k-1)+k} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ pour $k \neq 0$ et $k \neq 1$
or $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ donc $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

2) on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour $n \geqslant 1$; d'après ce qui précède on obtient :
$0 < u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ donc $0 < u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$
ainsi la suite (u_n) est croissante (évident) et majorée par 1
d'après le TH de CV monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite L ; de plus $0 < L < 1$; en fait on montre que $L = \frac{\pi^2}{6} - 1$

Ex 2 : (**) - *Calculs de sommes diverses (type DS)*

1) $$\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) = \sum_{i=2}^{n} i^2 - \sum_{i=2}^{n} i = (\sum_{i=2}^{n} i^2 - 1) - (\sum_{i=2}^{n} i - 1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

2) $\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = 2\sum_{j=1}^{n} (j) - \sum_{j=1}^{n} (1) = n(n+1) - n = n^2$ (une preuve de nature géométrique est aussi à voir ….)

3) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & si \;\; n=2p \\ -1 & si \;\; n=2p+1 \end{cases}$ (sommes télescopiques)

4) $$\sum_{k=0}^{n} (k+n) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n(n+1) = \frac{3n(n+1)}{2}$$

5) $$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{3} . \left(\frac{2}{9}\right)^i = \frac{1}{3} \times \frac{1 - (\frac{2}{9})^{n+1}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{3}{7} \times (1 - (\frac{2}{9})^{n+1})$$

6) $$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k))$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1)$$
$$= \ln(n+1) - \ln(2) - \ln(n) + \ln(1) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) \underset{+\infty}{\rightarrow} -\ln(2)$$

7) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \sum_{k=0}^{n} (\frac{1/3}{3k+1} - \frac{1/3}{3k+4}) = \frac{1}{3} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k+4}$$
$$= \frac{1}{3}((1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n+1}) - (\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{3n+4}))$$
$$= \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3n+4}) = \frac{n+1}{3n+4} \underset{+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{3}$$

8) $$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i . \sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} ni = n . \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

9) $$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

10) $$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (i+j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} (i) + \sum_{j=1}^{n} (j)) = \sum_{i=1}^{n} (ni + \frac{n(n+1)}{2})$$
$$= n . \sum_{i=1}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2} . \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} = n^2(n+1)$$

11) $\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} x^{i+j} = \sum_{i=1}^{n} x^{i.} \sum_{j=1}^{n} x^j = \sum_{i=1}^{n} x^{i.} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1-x}\right)^2$ pour $x \neq 1$

12) $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} . \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{j+1} . \frac{j(j+1)}{2})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$

13) $$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(j-i)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(j-i)=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{j}j-\sum_{i=1}^{j}i)=\sum_{j=1}^{n}(j^2-\frac{j(j+1)}{2})$$

$$=\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{j=1}^{n}j)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}-\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n^2-1)}{6}$$

14) $$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(\frac{i^2}{j})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(\frac{i^2}{j})=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.\sum_{i=1}^{j}(i^2)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)(2j+1)}{6}=\sum_{j=1}^{n}(\frac{j^2}{3}+\frac{j}{2}+\frac{1}{6})=\frac{n(4n^2+15n+17)}{36}$$

15) $$\sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}(i+j)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2)=\sum_{i=1}^{n}(i^2.\sum_{j=1}^{n}1+2i.\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}j^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(ni^2+in(n+1)+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

$$=\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$$

16)
$$\sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}max(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}max(i,j)=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{i}max(i,j)+\sum_{j=i+1}^{n}max(i,j))$$

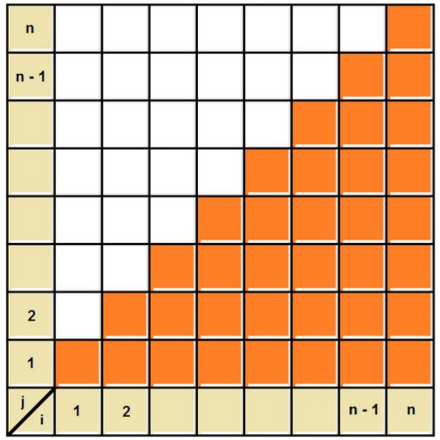
$$=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{i}i+\sum_{j=i+1}^{n}j)=\sum_{i=1}^{n}(i^2+\frac{(i+1+n)(n-j)}{2})=\sum_{i=1}^{n}(\frac{i^2-i+n^2+n}{2})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^2-i)+\frac{n^2(n+1)}{2}=\frac{n(n^2-1)}{6}+\frac{n^2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

17) de la même façon on obtient :

$$\sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}min(i,j)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

en image cela correspond à ---------------->



on retrouve la somme bien connue

$$\sum_{i=1}^{n}(i^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ex 10 : (**) - *Calculs de produits divers (type DS)*

les calculs de produits sont beaucoup plus intuitifs ; il suffit simplement de donner les résultats à l'aide de factorielles ; on donne ici seulement les résultats attendus :

1) $$\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}=\sqrt{(n+1).(n!)^2}$$

2) $$\prod_{k=1}^{n}(-5)^{k^2-k}=(-1)^n.\sqrt{5}^{n(n+1)}$$

3) $$\prod_{k=1}^{n}\frac{4^k}{k^2}=\frac{2^{n(n+1)}}{(n!)^2}$$

4) $$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{(2n+1)!}{(2n)!}$$

5) $$\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1)=\frac{(2n)(2n+1)(2n-1)!}{(2n-2)!}$$

6) $$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}x^{i+j}=x^{n(n+1)}$$

7) $$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}(2i)=(2n!)^n$$ attention : $(2n!)\neq(2n)!$

8) $$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}(i^j)=\sqrt{n!}^{n(n+1)}$$

9) $$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}(ij)=(n!)^2$$

10) $$\prod_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{p}2^{p!.k}\right)=\prod_{p=0}^{n-1}\frac{1-(2^{p!})^{p+1}}{1-2^{p!}}$$