

■ VOCABULAIRE USUEL

- 1) $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ Montrer que la fonction $x \mapsto x - \frac{1}{x}$ est injective sur \mathbb{R}_+^* . Et sur \mathbb{R}^* ?
- 2) a) La fonction $x \mapsto xe^x$ est-elle injective sur \mathbb{R} ?
b) Déterminer son image.
- 3) Déterminer l'image de la fonction $x \mapsto x^n \ln x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 4) a) Sur quels intervalles les plus grands possible) la fonction $x \xrightarrow{f} \sqrt{x^2 + x + 1}$ est-elle injective ?
b) Déterminer $f([-2, 4])$.

2) $\textcircled{1}$ Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions :

- 1) $x \mapsto \sqrt{3x-4}$. 2) $x \mapsto \frac{5}{2x+1}$.
- 3) $x \mapsto 1 + \ln(2-x)$.

3) $\textcircled{1}$ On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{2-x}$.

- 1) Tracer rapidement l'allure du graphe de f .
2) Déterminer les points fixes de f et montrer que $[0, 2]$ et $[-2, 2]$ sont stables par f .

4) $\textcircled{1}$ Montrer, grâce au TVI strictement monotone, que la fonction $x \xrightarrow{f} \sqrt{x^3-1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser).

- 2) Retrouver le résultat de la question 1) et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$.

5) $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser) et déterminer une expression explicite de sa réciproque.

9) $\textcircled{1}$ Déterminer les ensembles de définition, continuité et dérivabilité des fonctions :

- 1) $x \mapsto \sqrt{\ln x}$. 2) $x \mapsto \sqrt{e^x + 2e^{-x} - 3}$.
4) $x \mapsto \sqrt{2-|x-3|}$. 5) $x \mapsto \frac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$.

10) $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ 1) Étudier la parité/imparité, les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité de $x \mapsto \frac{x^3}{x^2-3}$.

- 2) Même question avec $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$, mais sans la convexité/concavité.

11) $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales :

- 1) $x \mapsto x^5 - x^3 + 1$.
2) $x \mapsto 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9$.

■ LOGARITHME, EXPONENTIELLE ET PUISSANCES

12) $\textcircled{1}$ Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ des fonctions $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

14) $\textcircled{1}$ 1) Étudier les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité de la fonction $x \mapsto x^x$.
2) Combien l'équation $y = x^x$ d'inconnue $x > 0$ possède-t-elle de solutions pour tout $y \in \mathbb{R}$?

15) 1) $\textcircled{1}$ Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution.
2) $\textcircled{1}$ Montrer que l'équation $e^{-x^2} = e^x - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution.
3) $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ Combien la fonction $x \mapsto 1 + \frac{x}{\ln x}$ possède-t-elle de points fixes ?