Exercice 2

Fonction polynôme **(7 points)**

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x^2 - 8x + 12)$.

2) $f'(x) = 0 \iff x^2 - 8x + 12 = 0 \overset{\Delta=64-48=16=4^2}{\iff} x_1 = \dfrac{8+4}{2} = 6$ ou $x_2 = \dfrac{8-4}{2} = 2$

signe de $f'(x)$ = signe de $x^2 - 8x + 12$.

On obtient le tableau de variation suivant :

$f(0) = 0$
$f(2) = 8 - 48 + 72 = 32$
$f(6) = 216 - 12 \times 36 + 36 \times 6 = 0$
$f(8) = 512 - 12 \times 64 + 36 \times 8 = 32$

x	0		2		6		8
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	32	↘	0	↗	32

3) (T_4) : $y = f'(4)(x-4) + f(4)$

$f(4) = 64 - 192 + 144 = 16$ et $f'(4) = 3(16 - 32 + 12) = -12$.

On obtient alors : (T_4) : $y = -12(x-4) + 16 \iff y = -12x + 64$.

4) $f(x) - (-12x + 64) = x^3 - 12x^2 + 36x + 12x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

$(x-4)^3 = (x-4)^2(x-4) = (x^2 - 8x + 16)(x-4) = x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 32x + 16x - 64$
$= x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$.

On en déduit que le signe de $f(x) - (-12x + 64)$ est celui de $(x-4)$ et donc que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de (T_4) si $x < 4$ et au dessus si $x > 4$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x = 4$.

On trace la droite horizontale d'équation $y = 5$ puis on cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou au dessus de la droite d'équation $y = 5$.

On l'aide de la fonction « intersection » de la calculatrice, on trouve :

$$S = [0,146\ ;\ 5,000] \cup [6,854\ ;\ 8,000].$$

Exercice 3

(3 points)

a) Dans ABH rectangle en H, d'où $\cos 20^\circ = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = 4\cos 20^\circ$

b) Dans AHC rectangle en H, d'où $\tan 40^\circ = \dfrac{HC}{AH} \Rightarrow HC = AH \tan 40^\circ$

On en déduit $HC = 4\cos 20^\circ \tan 40^\circ$

c) $HC \approx 3,2$

Exercice 4

(3 points)

a) ABH est rectangle en H et possède un angle de 45° donc, ABH est isocèle en H.

On a alors : $AH = 3$ et $AB = 3\sqrt{2}$

Dans le triangle AHC rectangle en H : $AC = \dfrac{3}{\cos 60^\circ} = 6$ et $HC = 3\tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$

b) périmètre $= 3\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{3} + 3 = 9 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

Exercice 3

Inéquation **(4 points)**

1) $5x^2 - 3x > 0 \iff x(5x-3) > 0$ deux racines $x_1 = 0$ ou $x_2 = \dfrac{3}{5}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$x(5x-3)$		+	0	−	0	+	

$S =]-\infty\ ;\ 0[\cup \left]\frac{3}{5}\ ;+\infty\right[$

2) $x^2 + 3x - 12 \leqslant 2x \iff x^2 + x - 12 < 0$ on a $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

Deux racines : $x_1 = \dfrac{-1+7}{2} = 3$ ou $x_2 = \dfrac{-1-7}{2} = -4$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
x^2+x-12		+	0	−	0	+	

$S = [-4\ ;\ 3]$

3) $\dfrac{-2x^2-x+3}{x} \geqslant 0$, $D_f = \mathbb{R}^*$. Valeurs frontières : $x = 0$ ou

$-2x^2 - x + 3 = 0 \iff x_1 = 1$ racine évidente $P = -\dfrac{3}{2}$ donc $x_2 = -\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		1		$+\infty$
$-2x^2-x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x^2-x+3}{x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty\,; -\dfrac{3}{2}\right] \cup \,]0\,;\,1]$

Exercice 3

Angle et projection **(5 points)**

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1-3 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = -8 + 12 = 4.$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\widehat{BAC} \Rightarrow \cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

$AB = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{4}{10\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5\sqrt{5}} \Rightarrow \widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right) \approx 79,7^\circ$.

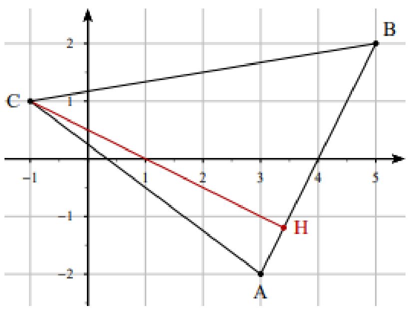
3) Comme H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$, on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH \Rightarrow AH = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

D'après le théorème de Pythagore dans AHC rectangle en H :

$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 25 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{125-4}{5} = \dfrac{121}{5} \Rightarrow CH = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$

4) $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{1}{2} AB \times CH = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \dfrac{11}{\sqrt{5}} = 11$



Exercice 4

Suite arithmético-géométrique **(5 points)**

1) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5u_n + 3 - 6 = 0.5u_n - 3 = 0,5(u_n - 6) = 0,5v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,5$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 1$.

b) $v_n = v_0 q^n = 0,5^n$ donc $u_n = v_n + 6 = 0,5^n + 6$.

c) $u_8 = 0,5^8 + 6 \approx 6,004$ à 10^{-3} près.

On peut conjecturer que la suite tend vers 6.

En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n + 6 = 6$

2) a) $S = v_0 \times \dfrac{1-0,5^{101}}{1-0,5} = 2(1-0,5^{101}) \approx 2.$

b) $S' = (v_0+6) + (v_1+6) + \cdots + (v_{100}+6) = S_n + 101 \times 6 \approx= 608.$

Exercice 2

Calcul de dérivées **(8 points)**

1) $f(x) = 3x^4 - 18x^2 + 21$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 12x^3 - 36x = 12x(x^2-3) = 12(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

2) $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$ dérivable sur les intervalles de $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4x^2-1}{x^2} = \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}$

3) $f(x) = \sqrt{5-2x}$ dérivable sur $\left]-\infty\,; \dfrac{5}{2}\right[$

$f'(x) = \dfrac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{5-2x}}$

4) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$ dérivable sur les intervalles de $\mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$

$f'(x) = \dfrac{-3(2x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-6x}{(x^2-1)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-3x}$ dérivable sur les intervalles de $\mathbb{R} - \{0,\,;\,3\}$

$f'(x) = \dfrac{2(x^2-3x)-(2x-3)(2x+1)}{(x^2-3x)^2} = \dfrac{2x^2-6x-4x^2-2x+6x+3}{(x^2-3x)^2} = \dfrac{-2x^2-2x+3}{(x^2-3x)^2}$

7) $f(x) = (3x^2-5x+1)^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3(6x-5)(3x^2-5x+1)^2$