T^{ale} spé maths **Prépa BAC** **02/03/2023**

Exercice 1 : Limites de fonctions – 3 pts

Déterminer les limites suivantes en justifiant avec soin :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-7x+1}{x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-3}{(x-1)^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{\dfrac{5}{2-x}}$

Exercice 2 : Fonctions Exponentielles – 6 pts

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$.

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**
   a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^2e^x - 1$.
   Étudier le sens de variation de la fonction g et déterminer la limite de g en $+\infty$.
   Dresser le tableau de variation.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0\,;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   c) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3}.
   d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
2) **Étude de la fonction f**
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   d) Démontrer que f admet pour minimum le nombre : $m = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.
   e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice 3 : Probabilités conditionnelles – Loi Binomiale - 4 pts

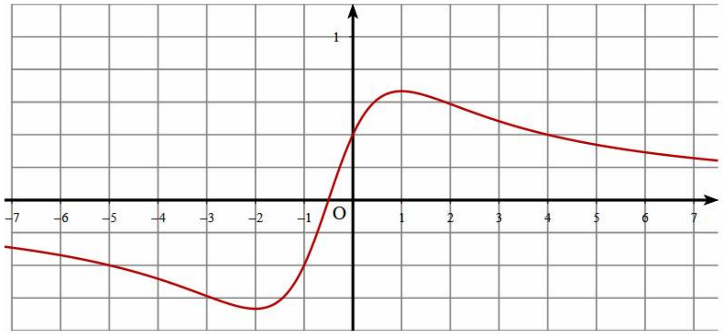
Le directeur d'un hôtel tente de louer toutes ses chambres malgré les défections de quelques clients. Il a instauré un système de réservations et a constaté que 20 % des clients réservent par téléphone, les autres utilisent internet.
Mais certains clients ayant réservé ne viennent pas ; cela concerne 4 % des clients ayant réservé par téléphone, et 10% des clients ayant réservé par internet.
On considère une réservation prise au hasard. Soit les événements :

- T : « la réservation a été faite par téléphone » ;
- I : « la réservation a été faite par Internet » ;
- H : « le client se présente à l'hôtel ».

1) a) Représenter la situation par un arbre de probabilité.
   b) Montrer que $p(\mathrm{H}) = 0,912$.
   c) On considère un client présent dans l'hôtel. Quelle est la probabilité qu'il ait réservé par internet ? (arrondir au millième)
2) Le directeur sait qu'il ne peut accueillir que 100 clients. Mais il a accordé 106 réservations. Soit X la variable aléatoire qui dénombre les clients qui se présentent à l'hôtel.
   a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b) Quelle est la probabilité que les 106 clients se présentent à l'hôtel ? (arrondir à 10^{-5})
   c) Quelle est la probabilité que le directeur se retrouve en situation de surréservation, c'est à dire qu'au moins 101 clients se présentent à l'hôtel ? (arrondir au centième)

Exercice 4 : Logarithmes – 5 pts

Partie I : lectures graphiques f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



1) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2) a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$.

1) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Déterminer $f'(x)$.
3) Dresser le tableau des variations de f.
4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
5) a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.
   b) Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.