T^{ale} spé maths **Prépa BAC - *Corrigé*** **02/03/2023**

Exercice 1 : Limites de fonctions – 3 pts

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 1}{x-3} \overset{\div x \neq 0}{=} \dfrac{2x - 7 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$ on a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x - 7 + \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{3}{x} = 1 \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$g(x) = \dfrac{e^x - 3}{(x-1)^2}$ on a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1} e^x - 3 = e - 3 < 0 \\ \lim\limits_{x\to1} (x-1)^2 = 0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to1} g(x) = -\infty$

2) $h(x) = \sqrt{\dfrac{5}{2-x}}$ signe de $(2-x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x\to2^-} 2 - x = 0^+$ par quotient $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{5}{2-x} = +\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Par composition $\lim\limits_{x\to2^-} h(x) = +\infty$

Exercice 2 : Fonctions Exponentielles – 6 pts

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

a) Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\}$ Par produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2)$, comme $x \geqslant 0$, $e^x > 0$ et $x + 2 > 0$:

Donc $g'(x) \geqslant 0$, la fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a alors le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

b) Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction g est continue (car dérivable), strictement croissante et la fonction g change de signe car $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

c) Pour obtenir un intervalle fermé, $g(1) = e - 1 \approx 1,718 > 0$ donc $\alpha \in [0\ ;\ 1]$.
Avec l'algorithme de dichotomie, on trouve : $0,703 \leqslant a \leqslant 0,704$ (10 itérations)

d) Comme la fonction g est croissante, on a :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) **Étude de la fonction f**

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ $\qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2e^x - 1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) D'après l'étude de la fonction g, on a sur $\mathbb{R}_+^*$, le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Le minimum m de la fonction vaut : $f(\alpha) = e^\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$

or, on sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2}$

En remplaçant, on trouve alors : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$

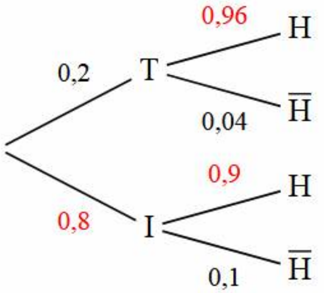
e) D'après la question 1c), on sait que : $0,703 \leqslant \alpha \leqslant 0,704$
La fonction inverse est décroissante et la fonction carrée croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où :

$$\frac{1}{0,704} \leqslant \frac{1}{\alpha} \leqslant \frac{1}{0,703} \quad \text{et} \quad \frac{1}{0,704^2} \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \leqslant \frac{1}{0,703^2}$$

Par somme : $\dfrac{1}{0,704} + \dfrac{1}{0,704^2} \leqslant m \leqslant \dfrac{1}{0,703} + \dfrac{1}{0,703^2} \Leftrightarrow 3,43 \leqslant m \leqslant 3,45$

Exercice 3 : Probabilités conditionnelles – Loi Binomiale - 4 pts

1) a) On a l'arbre suivant :



b) $p(\mathrm{H}) \overset{\text{prob. totale}}{=} p(\mathrm{T} \cap \mathrm{H}) + p(\mathrm{I} \cap \mathrm{H}) = p(\mathrm{T})p_{\mathrm{T}}(\mathrm{H}) + p(\mathrm{I})p_{\mathrm{I}}(\mathrm{H})$

$= 0,2 \times 0,96 + 0,8 \times 0,9 = 0,912.$

c) $p_{\mathrm{H}}(\mathrm{I}) = \dfrac{p(\mathrm{I} \cap \mathrm{H})}{p(\mathrm{H})} = \dfrac{0,8 \times 0,9}{0,912} \approx 0,789.$

2) a) Soit l'expérience : on tire au hasard une réservation et on appelle succès la personne se présente à l'hôtel avec une probabilité de 0,912. On réitère 106 fois cette expérience, que l'on assimile à des tirages avec remise, de façon identique et indépendante dont la variable aléatoire X est associée au nombre de succès.

X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(106 ;\ 0,912)$.

b) $p(X = 106) = 0,912^{106} \approx 5,75 \times 10^{-5} \approx 6 \times 10^{-5}$.

c) $p(X \geqslant 101) = 1 - p(X \leqslant 100) = 1 - \text{binomFRép}(106, 0.912, 100) \approx 0,087 \approx 0,09.$

Il y a 9 % de chance que le directeur se retrouve en situation de surréservation.

<u>Exercice 4 :</u> Logarithmes – 5 pts

Partie I : lectures graphiques

1) Comme la courbe donnée est la représentation de f', pour déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f, on lit sur le graphique : $f'(0) = 0,4$.

2) a) D'après la courbe donnée, on a le tableau de variation de f' suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

b) f est convexe si la fonction dérivée est croissante ($f''(x) > 0$) soit sur $[-2 ;\ 1]$.

Partie II : étude de fonction

1) $f(x) \overset{x \neq 0}{=} \ln\left[x^2\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{2x^2}\right)\right]$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{2x^2} = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{2x^2}\right) = +\infty\end{array} \quad \text{or} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Par composition : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

2) $f'(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + \dfrac{5}{2}}$.

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Signe de $\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$: $\Delta = 1 - 10 = -9 < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + \dfrac{5}{2} > 0$.

Donc signe de $f'(x)$ = signe de $(2x + 1)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) Sur $\left[-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$, la fonction f est continue (car dérivable), strictement croissante et 2 est compris entre $\ln\dfrac{9}{4} \approx 0,811$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$,

d'après le TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α.

b) $f(2) = \ln\dfrac{17}{2} \approx 2,140$ donc $\alpha \in [-0,5 ;\ 2]$

Par l'algorithme de dichotomie, en rentrant la fonction $f(x) - 2$, on a : $\alpha \approx 1,767$

5) a) $$f''(x) = \frac{2\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - (2x+1)^2}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 5 - 4x^2 - 4x - 1}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{2(-x^2 - x + 2)}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}.$$

b) Il faut déterminer les racines et le signe de $f''(x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ ou $x_2 = -2$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion en (-2) et en 1 car $f''(x)$ s'annule deux fois en changeant de signe en (-2) et en 1.