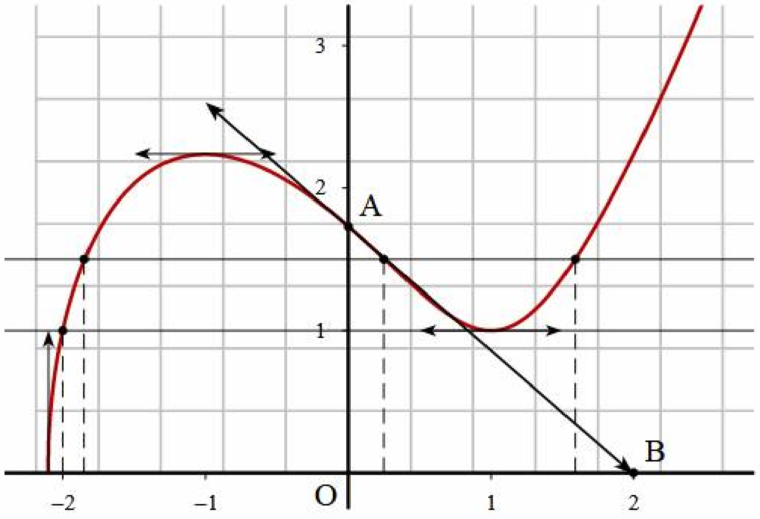
Exercice 1 : Dérivation – Étude graphique - 5 pts



1) a) $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes horizontales en 1 et (-1) donc : $f'(-1) = f'(1) = 0$.

   b) $f'(0) = \dfrac{-\text{OA}}{\text{OB}} = \dfrac{-1,73}{2} = -0,865$.

2) a) Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1.5$, on trace la droite $y = 1,5$, puis on cherche les abscisses des points d'intersection entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $y = 1,5$.

   b) On trouve trois solutions : $x_1 = -1.8$, $x_2 = 0.25$ et $x_3 = 1.6$

   c) Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 1$, on trace droite $y = 1$, puis l'on cherche les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou au-dessus de la droite $y = 1$.

   On trouve alors : $S = [-2\,;+\infty[$

3) On a le tableau de variations suivant :

x	$-2,1$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2,25$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) f n'admet pas de nombre dérivée en $-2,1$ car la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $-2,1$ est verticale.

5) <u>BONUS</u> : Que peut-on dire de la dérivée seconde de *f* en $x = 0$?
On observe que $f''(x)=0$ puisque f est concave si $x<0$ et f est convexe si $x>0$
Ainsi le point A représente un point d'inflexion de la courbe *Cf*

Exercice 2 : Trigonométrie – Étude de lignes trigonométriques - 3 pts

1) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{1+\cos(2x)}{2} = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \overset{\cos\frac{\pi}{8}>0}{\Longrightarrow} \cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \overset{\sin\frac{\pi}{8}>0}{\Longrightarrow} \sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 3 : Dérivation – Étude d'une fonction Polynôme - 6 pts

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x^2 - 8x + 12)$.

2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \overset{\Delta=64-48=16=4^2}{\Leftrightarrow} x_1 = \dfrac{8+4}{2} = 6$ ou $x_2 = \dfrac{8-4}{2} = 2$

   signe de $f'(x)$ = signe de $x^2 - 8x + 12$.

   On obtient le tableau de variation suivant :

   $f(0) = 0$
   $f(2) = 8 - 48 + 72 = 32$
   $f(6) = 216 - 12\times 36 + 36\times 6 = 0$
   $f(8) = 512 - 12\times 64 + 36\times 8 = 32$

x	0		2		6		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$	32

3) (T_4) : $y = f'(4)(x-4) + f(4)$

   $f(4) = 64 - 192 + 144 = 16$ et $f'(4) = 3(16 - 32 + 12) = -12$.

   On obtient alors : (T_4) : $y = -12(x-4) + 16 \Leftrightarrow y = -12x + 64$.

4) $f(x) - (-12x + 64) = x^3 - 12x^2 + 36x + 12x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

   $(x-4)^3 = (x-4)^2(x-4) = (x^2 - 8x + 16)(x-4) = x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 32x + 16x - 64$
   $= x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

   On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$.

   On en déduit que le signe de $f(x) - (-12x + 64)$ est celui de $(x-4)$ et donc que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de (T_4) si $x < 4$ et au dessus si $x > 4$.
   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x = 4$.

6) <u>BONUS</u> : Résoudre l'inéquation $f(x) = 5$

On cherche à résoudre l'équation $f(x)=5$

donc $x^3-12x^2+36x=5$

donc $x^3-12x^2+36x-5=0$

donc $(x-5)(x^2-7x+1)=0$

donc $x-5=0$ ou $x^2-7x+1=0$

donc $x=5$ ou $x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$

<u>Exercice 4 :</u> Produit Scalaire – Étude de points dans un triangle - 5 pts

1) a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix}8-(-4)\\16-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8-2\\-2-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-12\end{pmatrix} = 72-72=0$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix}8-(-4)\\-2-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8-2\\16-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix} = 72-72=0$

b) $(HC)\perp(AB)$ et $(HB)\perp(AC)$ donc H est l'intersection des hauteurs issues de C et B du triangle ABC donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

2) a) $I = \left(\dfrac{8+8}{2}\ ;\ \dfrac{16-2}{2}\right) = (8\ ;\ 7)$

b) On pose $G(x\,;y)$, en remplaçant dans l'égalité vectorielle, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-(-4)\\y-10\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}8-(-4)\\7-10\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+4\\y-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=8\end{cases}$$

3) $KA^2 = [5-(-4)]^2+(7-10)^2 = 81+9 = 90$

$KB^2 = (5-8)^2+(7-16)^2 = 9+81 = 90$

$KC^2 = (5-8)^2+[7-(-2)]^2 = 9+81 = 90$

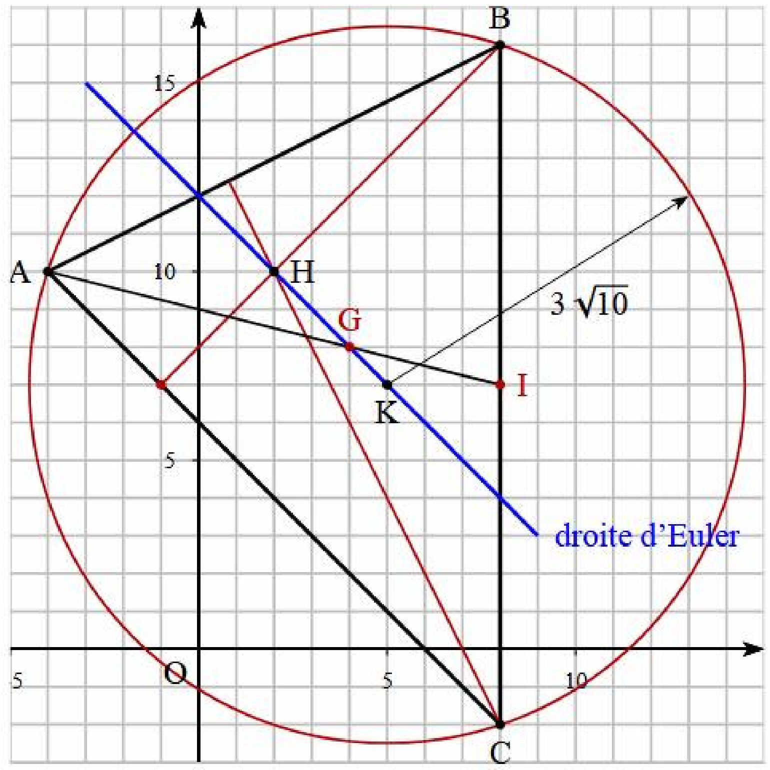
On a : $KA = KB = KC$ donc K est le centre du cercle circonscrit.

4) $\det(\overrightarrow{GK},\overrightarrow{GH}) = \begin{vmatrix}5-4 & 2-4\\7-8 & 10-8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2\\-1 & 2\end{vmatrix} = 2-2=0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires donc les points G, K et H sont alignés.

Remarque : Cette droite s'appelle la droite d'Euler.

Cf la figure ci-contre → **droite en bleue**



<u>Exercice 5 :</u> Probabilités – Étude d'un arbre pondéré - 4 pts

1) Pourcentage de la production totale du sous-traitant B : 60 %.

2) D'après l'énoncé, en appelant D l'événement « le smartphone est défectueux » :

$$p(A) = 0,4,\quad p(B) = 0,6\quad p_A(D) = 0,04 \ \text{ et }\ p(D) = 0,034$$

$p(D) = p(A\cap D) + p(B\cap D) = p(A)\times p_A(D) + p_B\times p_B(D) \Leftrightarrow$

$0,034 = 0,4\times 0.04 + 0,6p_B(D) \Leftrightarrow p_B(D) = \dfrac{0,034-0.4\times 0,04}{0,6} = 0,03$

3 % des smartphones produits par le sous-traitant B sont défectueux.

3) $p_D(B) = \dfrac{p(B\cap D)}{p(D)} = \dfrac{p_B\times p_B(D)}{p(D)} = \dfrac{0,6\times 0,03}{0,034} \approx 0,471.$

47,1 % des smartphones défectueux proviennent du sous-traitant B.

Remarque : l'arbre pondéré est laissé au lecteur …