EXERCICE 1

QCM justifié **(4 points)**

1) **Réponse a)**

$f(1) = 1 + 2 - 3 = 0$ et $f'(x) = 2x + 2 + \dfrac{3}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 2 + 2 + 3 = 7.$

L'équation de la tangente en 1 : T_1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 7(x-1)$

2) **Réponse b)** forme indéterminée : $g(x) = e^x\left(3 - \dfrac{x}{e^x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \overset{\text{quotient}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \dfrac{x}{e^x} = 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\end{array}$$

3) **Réponse b)**

$f'(x) = 1e^{-2x} + x(-2)e^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$

$f''(x) = -2e^{-2x}(1-2x) + e^{-2x}(-2) = e^{-2x}(-2+4x-2) = 4(x-1)e^{-2x}.$

4) **Réponse c)**

Il faut regarder le signe de $f'(x)$ sur le graphique :

- sur $[0 ; 2]$, $f'(x) \leqslant 0$, f décroissante
- sur $[2 ; 5]$, $f'(x) \geqslant 0$, f croissante
- sur $[5 ; 7]$, $f'(x) \leqslant 0$, f décroissante

EXERCICE 1

Limites **(5 points)**

Déterminer les limites suivantes en justifiant avec soin :

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{2x - 2} \overset{\div x \neq 0}{=} \dfrac{x + 1 - \dfrac{6}{x}}{2 - \dfrac{2}{x}}$ on a $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 - \dfrac{6}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{2}{x} = 2\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Soit $g(x) = x\cos x$

Pour $x > 0$, on a : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \overset{\times x>0}{\Rightarrow} -x \leqslant x\cos x \leqslant x$

$\lim\limits_{x\to0^+} -x = \lim\limits_{x\to0^+} x = 0$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to0^+} x\cos x = 0.$

3) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

4) a) Les racines de (x^2-4) sont (-2) et 2 donc :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	−	0	+	

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2} 2x = -4 \\ \lim\limits_{x\to-2^-} x^2 - 4 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to-2^+} x^2 - 4 = 0^-\end{array}\right\}$ Par quotient $\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty\end{array}$

$f(x)$ n'admet pas de limite en (-2) car $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty.$

c) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale en $x = -2$.

EXERCICE 1

Loi binomiale **(5 points)**

1) $p(X=3) = \dbinom{20}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^{17} = \text{binomFdp}(20, 0.4, 3) \approx 0,012.$

$p(X=10) = \dbinom{20}{10} \times 0,4^{10} \times 0,6^{10} = \text{binomFdp}(20, 0.4, 10) \approx 0,117.$

2) $p(X \geqslant 9) = 1 - p(X \leqslant 8) = 1 - \text{binomFRép}(20, 0.4, 8) \approx 0,404.$

3) $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,6^{20} \approx 1,000.$

On est donc quasi certain d'obtenir au moins un succès.

4) $E(X) = np = 20 \times 0,4 = 8$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4,8} \approx 2,191.$

5) $p(6 \leqslant X \leqslant 10) = p(X \leqslant 10) - p(X \leqslant 5) = 0,747.$

On a : $E(X) + \sigma(X) \approx 10,191 \approx 10$ et $E(X) - \sigma(X) \approx 5,809 \approx 6.$

L'intervalle $[6, 10]$ correspond à l'intervalle de confiance à 75 %.

EXERCICE 2

Limites de suites **(4 points)**

1) $u_n = \dfrac{n^2\left(5 - \dfrac{2}{n}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n^2} - 1\right)} = \dfrac{5 - \dfrac{2}{n}}{\dfrac{1}{n^2} - 1}$ d'où $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \dfrac{2}{n} = 5 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} - 1 = -1\end{array}\right. \overset{\text{quotient}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$

2) $\begin{cases}-1 \leqslant \cos n \leqslant 1\\ -4 \leqslant 4(-1)^n \leqslant 4\end{cases} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} -5 \leqslant \cos n + 4(-1)^n \leqslant 5 \overset{\div n}{\Rightarrow} -\dfrac{5}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{5}{n}.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{5}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3) $u_n \overset{\div n}{=} 2n + 1 - \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}}$ d'où $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}} = 0\end{cases} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4) $u_n = 3^n\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right]$ d'où $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \dfrac{2}{3} < 1\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \text{ car } 3 > 1\end{cases} \overset{\text{somme et produit}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \infty$

Exercice 4

Formule **(1 point)**

$\forall n, p \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant p \leqslant n$:

$$p\binom{n}{p} = \frac{p \times n!}{p!(n-p)!} = \frac{\cancel{p} \times n(n-1)!}{\cancel{p}(p-1)! \times (n-p)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)! \times [n-1-(p-1)]!} = n\binom{n-1}{p-1}$$
