1. Démonstrations du formulaire de trigonométrie:

1.1. Formules d'addition:

a) $\cos(a+b)$:

On sait que $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$

Donc $\cos(x)=\Re(e^{ix})$

Or $\cos(a+b)=\Re(e^{i(a+b)})$

On a alors $e^{i(a+b)}=e^{ia}e^{ib}=(\cos(a)+isin(a))(\cos(b)+isin(b))$
$= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+i(\sin(b)\cos(a)+\sin(a)\cos(b))$

Et donc $\boxed{\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$

b) $\sin(a+b)$:

De même, on sait que $\sin(x)=\Im(e^{ix})$

Or $e^{i(a+b)}=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+i(\sin(b)\cos(a)+\sin(a)\cos(b))$

Donc $\boxed{\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}$

c) $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$:

Ici il suffit de remplacer b par $-b$

On a alors $\cos(a+(-b))=\cos(a)\cos(-b)-\sin(a)\sin(-b)$

Or $\cos(-x)=\cos(x)$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$

Donc $\boxed{\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)}$

De la même manière on trouve: $\boxed{\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)}$

d) $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$:

En utilisant les formules précédentes, on remplace b par a

On a alors: $\boxed{\cos(a+a)=\cos(2a)=\cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a)=cos^2(a)-sin^2(a)}$

Sachant que $cos^2(a)+sin^2(a)=1$

On peut également dire que: $\boxed{\cos(2a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)}$

On utilise le même raisonnement pour $\sin(2a)$ et on obtient:

$\boxed{\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)}$

e) $\tan(a+b)$ $\tan(a-b)$ $\tan(2a)$:

On sait que $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Donc $\tan(a+b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$$

On factorise par $\cos(b)$ au numérateur et au dénominateur et on simplifie par $\cos(b)$

On simplifie les $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ par $\tan(x)$

On obtient: $\tan(a+b)=\dfrac{\sin(a)+\tan(b)\cos(a)}{\cos(a)-\sin(a)\tan(b)}$

On factorise par $\cos(a)$ au numérateur et au dénominateur et on simplifie par $\cos(a)$

Ensuite on remplace les $\dfrac{(\sin(x))}{(\cos(x))}$ par $\tan(x)$

On obtient: $\boxed{\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}}$

Pour obtenir $\tan(a-b)$, on remplace b par $-b$ dans la formule précédente

On obtient $\tan(a+(-b))=\dfrac{\tan(a)+\tan(-b)}{1-\tan(a)\tan(-b)}$

Or $\tan(-x)=-\tan(x)$ donc: $\boxed{\tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}}$

Pour $\tan(2a)$, on remplace b par a , on obtient:

$$\boxed{\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-tan^2(a)}}$$

1.2. <u>Formules d'Euler:</u>

On sait que: $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ et $e^{-ix}=\cos(x)-i\sin(x)$

Donc $e^{ix}+e^{-ix}=2\cos(x)$ et donc $\boxed{\cos(x)=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}$

De même: $e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin(x)$ et donc $\boxed{\sin(x)=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$

1.3. <u>Formules de linéarisation :</u>

a) $\cos(a)\cos(b)$ **:**

On sait que $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

et que $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

Donc $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos(a)\cos(b)$

Soit $\boxed{\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}}$

b) $\sin(a)\sin(b)$ **:**

De même $\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin(a)\sin(b)$

Donc $\boxed{\sin(a)\sin(b)=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}}$

c) $\sin(a)\cos(b)$ **:**

Pour finir, on sait que $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$

et que $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

Donc $\sin(a-b)+\sin(a+b)=2\sin(a)\cos(b)$

Et donc $\boxed{\sin(a)\cos(b)=\frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}}$

d) $cos^2(a)$ **:**

On sait que $\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$

On remplace b par a , on obtient:

$cos^2(a)=\frac{\cos(0)+\cos(2a)}{2}$ soit $\boxed{cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}}$

e) $sin^2(a)$:

On sait que $\sin(a)\sin(b)=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$, donc de la même manière:

$\boxed{sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}}$

f) $tan^2(a)$:

$$\tan(a)=\frac{\sin(a)}{\cos(a)} \quad \text{donc} \quad tan^2(a)=\frac{sin^2(a)}{cos^2(a)}$$

Soit $\boxed{tan^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{1-\cos(2a)}}$

1.4. Formules de transformation de somme en produit:

a) $\cos(a)+\cos(b)$ **:**

On sait que $\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$

On remplace a par $\frac{a+b}{2}$ et b par $\frac{a-b}{2}$

On a donc $\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})=\frac{\cos(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2})+\cos(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2})}{2}$

En simplifiant, on obtient:

$$\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})=\frac{\cos(a)+\cos(b)}{2}$$

Soit $\boxed{\cos(a)+\cos(b)=2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})}$

b) $\cos(a)-\cos(b)$ **:**

On sait que $\sin(a)\sin(b)=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$

On remplace a par $\frac{a+b}{2}$ et b par $\frac{a-b}{2}$

On a donc $\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})=\frac{\cos(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2})-\cos(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2})}{2}$

Qu'on simplifie pour obtenir $\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})=\frac{\cos(b)-\cos(a)}{2}$

Et donc $\boxed{\cos(a)-\cos(b)=-2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})}$

c) $\sin(a)+\sin(b)$ **:**

On sait que $\sin(a)\cos(b)=\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$

De la même manière que les démonstrations précédentes, on remplace a par $\dfrac{a+b}{2}$ et b par $\dfrac{a-b}{2}$, on obtient alors:

$$\boxed{\sin(a)+\sin(b)=2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})}$$

d) $\sin(a)-\sin(b)$ **:**

De la même manière que les démonstrations précédentes, on trouve:

$$\boxed{\sin(a)-\sin(b)=2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})}$$

1.5. <u>Formules dites d'arc moitié :</u>

a) $\cos(x)$:

On pose $t=\tan(\frac{a}{2})$ donc $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{1-tan^2(\frac{a}{2})}{1+tan^2(\frac{a}{2})}$

Or $tan^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$

Alors $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{\frac{2\cos(a)}{1+\cos(a)}}{\frac{2}{1+\cos(a)}}$, on simplifie par $1+\cos(a)$

On obtient alors: $\boxed{\cos(x)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$

b) $\sin(x)$:

$$\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\tan(\frac{a}{2})}{1+tan^2(\frac{a}{2})}=2\tan(\frac{a}{2})cos^2(\frac{a}{2}) \quad \text{car} \quad 1+tan^2(x)=cos^2(x)$$

On a donc: $\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\sin(\frac{a}{2})cos^2(\frac{a}{2})}{\cos(\frac{a}{2})}=2\sin(\frac{a}{2})\cos(\frac{a}{2})=\sin(a)$

car $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$

Donc $\boxed{\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}}$

c) $\tan(x)$:

$$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2\tan(\frac{a}{2})}{1-tan^2(\frac{a}{2})}$$

Or $\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-tan^2(x)}$ donc $1-tan^2(x)=\frac{2\tan(x)}{\tan(2x)}$

On a alors $\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2\tan(\frac{a}{2})\tan(a)}{2\tan(\frac{a}{2})}$

Donc $\boxed{\tan(a)=\frac{2t}{1-t^2}}$

1.6. <u>Formule de Moivre:</u>

On sait que $(e^{ix})^n=e^{inx}$ or $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$

Donc $(e^{ix})^n=(\cos(x)+isin(x))^n=e^{inx}=(\cos(nx)+isin(nx))$

Et donc $\boxed{(\cos(x)+isin(x))^n=(\cos(nx)+isin(nx))}$

1.7. <u>Formule d'angle moitié:</u>

On sait que $cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$, donc $cos^2(\frac{a}{2})=\frac{1+\cos(a)}{2}$

De plus, on sait que $\sqrt{x^2}=|x|$, donc $\boxed{\left|\cos(\frac{a}{2})\right|=\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}}$

De même, on sait que $sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$ et de la même manière on prouve que:

$\boxed{\left|\sin(\frac{a}{2})\right|=\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}}$

On sait que $\tan(\frac{x}{2})=\dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}$

on multiplie au numérateur et au dénominateur par: $2\cos(\frac{x}{2})$

On obtient $\tan(\frac{x}{2})=\dfrac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$ Sachant que $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

et que $cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$, on simplifie l'expression précédente et on obtient:

$$\boxed{\tan(\frac{x}{2})=\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}}$$

1.8. <u>Autres Formules:</u>

$$2\cos(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}=[2\cos(\frac{x}{2})][\cos(\frac{x}{2})+isin(\frac{x}{2})]=2\cos^2(\frac{x}{2})+2i\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

Or $cos^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$

Donc $2\cos^2(\frac{x}{2})+2i\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})=1+\cos(x)+isin(x)=1+e^{ix}$

Et donc $\boxed{e^{ix}+1=2\cos(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}}$

$$2i\sin(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}=[2i\sin(\frac{x}{2})][\cos(\frac{x}{2})+isin(\frac{x}{2})]=2i\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})-2\,sin^2(\frac{x}{2})$$

On sait que $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

Donc $2i\sin(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}=isin(x)-2\sin^2(\frac{x}{2})$

De plus, on sait que $sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

On obtient alors $isin(x)-2\sin^2(\frac{x}{2})=isin(x)-1+\cos(x)=e^{ix}-1$

Et donc $\boxed{e^{ix}-1=2i\sin(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}}$