Exercices corrigés – Révisions – Thème : Dérivation

Exercice 1 :

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes définies sur $I\!R$:

$f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 3x + 7$

$g(x) = 8$

$h(x) = 2x^2 - 4x + 1$

Exercice 2 :

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes définies sur $[-2;0]$

$f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+5}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x-6}{2-3x}$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $[-5;5]$ par :

$$f(x) = -3x^2 + 4x - 7$$

a) Déterminer $f'(x)$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-5;5]$ et en déduire le tableau de variations de f. Utilisez votre calculatrice pour calculer les valeurs de f qui doivent apparaître dans ce tableau.

Exercice 4:

Soit f la fonction à étudier sur $[-1;10]$ par $f(x) = \dfrac{5}{x+2}$.

a) Déterminer $f'(x)$.

Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-1;10]$ et en déduire le tableau de variations de f. Utilisez votre calculatrice pour calculer les valeurs de f qui doivent apparaître dans ce tableau.

Exercice 5 :

Soit $f(x) = x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 2x + 3$ une fonction définie et dérivable sur $[-10;10]$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Etudier le signe du trinôme : $3x^2 - 5x - 2$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 6 :

Soit f la fonction à étudier sur $[-15;10]$ par $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$.

a) Résoudre l'équation x-5=0, en déduire la valeur interdite de f.

b) Déterminer $f'(x)$.

c) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-15;10]$ et en déduire le tableau de variations de f. Utilisez votre calculatrice pour calculer les valeurs de f qui doivent apparaître dans ce tableau. Attention à la valeur interdite.

d) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ en -1.

Exercice 7 :

Soit f la fonction à étudier sur $[-20;20]$ par $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

a) Déterminer $f'(x)$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-20;20]$ et en déduire le tableau de variations de f. Utilisez votre calculatrice pour calculer les valeurs de f qui doivent apparaître dans ce tableau. Attention à la valeur interdite.

Exercice 1 :

Pour chacune des questions suivantes : déterminer l'expression de la fonction *F*, primitive de la fonction *f* définie sur l'intervalle I, en vérifiant la condition donnée :

1°) $f(x) = 2x + 3$ $\quad I = [-10;10] \quad F(-1) = 5$

2°) $f(x) = 4x^2 - x + 1$ $\quad I = [0;5] \quad F(0) = 1$

Exercice 2 :

Pour chacune des questions suivantes :

- Etablir l'expression de la fonction g', dérivée de la fonction g, définie sur l'intervalle I considéré.
- En déduire l'expression d'une fonction *F*, primitive de la fonction *f* définie sur l'intervalle *I*.

1°) $f(x) = 10x - \dfrac{3}{x^2}$ $\quad g(x) = 5x^2 + \dfrac{3}{x}$ $\quad I = [1;5]$

2°) $f(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$ $\quad g(x) = \dfrac{4}{x-1}$ $\quad I = [5;20]$

Exercice 8 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur l'intervalle $I = [-20;20]$.

$f_1(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 2$ $\quad f_2(x) = 3x^2 - 12x + 18$ $\quad f_3(x) = \dfrac{1}{3x-5}$ $\quad f_4(x) = \dfrac{-2x}{1-x}$

Exercice 9 :

On considère la fonction *f* définie sur $[-5;5]$ par $f(x) = -3x^2 + 4x - 7$.

a) Déterminer $f'(x)$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-5;5]$ et en déduire le tableau de variations de *f*. Utilisez votre calculatrice pour calculer les valeurs de *f* qui doivent apparaître dans ce tableau.

c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ en 1.

Exercice 10 :

Soit $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$ une fonction définie et dérivable sur $[-10;10]$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Etudier le signe du trinôme : $x^2 - 3x + 2$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction *f*.

Exercice 11 :

Soit *f* la fonction à étudier sur $[-5;10]$ par $f(x) = \dfrac{-5}{x+2}$.

a) Résoudre l'équation $x+2=0$, en déduire la valeur interdite de *f*.

b) Déterminer $f'(x)$.

c) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-5;10]$ et en déduire le tableau de variations de *f*. Utilisez votre calculatrice pour calculer les valeurs de *f* qui doivent apparaître dans ce tableau. Attention à la valeur interdite.

d) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ en 0.

Exercice 12 :

Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle *[-6 ; 6]* par :

$$f(x) = -x^2 + x + 20$$

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	*-6*	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
f(x)	*-22*		*0*	*8*		*18*			*18*		*8*		

2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction *f*.
3. Déterminer la ou les valeurs de *x* pour lesquelles *f'(x) = 0*
4. Donner le tableau de signes de *f '* et le tableau de variations de *f* sur l'intervalle *[-6 ; 6]*.
5. Tracer la courbe représentative C_f de la fonction *f* dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$:

Prendre : *1* cm comme unité graphique pour l'axe des abscisses et *0,5* cm comme unité graphique pour l'axe des ordonnées.

6. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse *–4*.

Exercice 13 :

Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$i(x) = \frac{2x-1}{3x+5}$$

Exercice 14 :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur l'intervalle $I = [-20;20]$.

$$f_4(x) = \frac{1}{3x-5} \qquad f_5(x) = \frac{-2x}{1-x}$$

Exercice 15 :

Soit f la fonction définie sur $[1,2;9]$ par

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

b) Etudier le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f.

c) Compléter le tableau suivant à l'aide de la calculatrice :

x	*1,2*	*1,5*	*2*	*3*	*5*	*9*
f(x)						

d) Tracer dans un repère orthonormal (unité graphique 1cm) la courbe C représentative de la fonction f.

CORRECTION

Exercice 1 :

Rappel :

Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$
k (constante réelle)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

$$f'(x) = -5\times 3x^2 + 4\times 2x - 3\times 1 + 0 = -15x^2 + 8x - 3$$

$$g'(x) = 0$$

$$h'(x) = 2\times 2x - 4\times 1 + 0 = 4x - 4$$

Exercice 2 :

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f(x) = \frac{4x-1}{2x+5}$ $\quad u = 4x-1 \quad u' = 4\times 1 - 0 = 4$

$\quad v = 2x+5 \quad v' = 2\times 1 + 0 = 2$

$$f'(x) = \frac{4\times(2x+5) - 2\times(4x-1)}{(2x+5)^2} = \frac{8x+20-8x+2}{(2x+5)^2} = \frac{22}{(2x+5)^2}$$

$g(x) = \frac{x-6}{2-3x}$ $\quad u = x-6 \quad u' = 1 - 0 = 1$

$\quad v = 2-3x \quad v' = 0 - 3\times 1 = -3$

$$g'(x) = \frac{1\times(2-3x) - (-3)\times(x-6)}{(2-3x)^2} = \frac{2-3x+3x-18}{(2x+5)^2} = \frac{-16}{(2x+5)^2}$$

Exercice 3 :

1. On trouve : $f('x) = -6x + 4$

2. Etude du signe de f' sur IR : f' s'annule en $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

D'après le cours sur les fonctions affines, on a :

x	-5		$\frac{2}{3}$		5
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-102	↗	-5,7	↘	-62

Exercice 4 :

Soit f la fonction à étudier sur $[-1;10]$ par $f(x)=\dfrac{5}{x+2}$.

a) $u=5 \quad u'=0$; $v=x+2 \quad v'=1$ donc $f'(x)=\dfrac{0\times(x+2)-5\times 4}{(x+2)^2}=\dfrac{-9}{(x+2)^2}$

b)

x	-1		10
-9		-	
$(x+2)^2$		+	
$f'(x)$		-	
$f(x)$	5	↘	0.4

Exercice 5 :

1. $f'(x)=3x^2-\dfrac{5}{2}\times 2x-2\times 1+0=3x^2-5x-2$

2. Signe du trinôme : $3x^2-5x-2$.

$\begin{cases} a=3 \\ b=-5 \\ c=-2 \end{cases}$ $\quad \Delta=(-5)^2-4\times 3\times(-2)=25+24=49$

Le trinôme a deux racines : $x_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 3}=\dfrac{5+7}{6}=\dfrac{12}{6}=2$

$x_2=\dfrac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\times 3}=\dfrac{5-7}{6}=\dfrac{-2}{6}=\dfrac{-1}{3}$

Tableau de signes du trinôme :

x	-10	$\frac{-1}{3}$		2	10
Signe du trinôme : $3x^2-5x-2$	Signe de a : +	0	Signe de $-a$: -	0	Signe de a : +

3.

x	-10	$\frac{-1}{3}$		2	10
Signe de f'	+	0	-	0	+
Variations de f	-1227 ↗	3.35	↘	-3	↗ 733

Exercice 6 :

a) x-5=0ssi x= 5 qui est la valeur interdite de f.

b) $f'(x)=\dfrac{0\times(x-5)-(2)\times1}{(x-5)^2}=\dfrac{-2}{(x-5)^2}$ en utilisant la règle : $\left(\dfrac{u}{v}\right)^2=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ sur $[-5;10]$ où $\begin{matrix}u=2\\ v=x-5\end{matrix}$

$u'=0$

$v'=1-0=1$

c) Comme sur $[-15;10]:(x-5)^2>0$ (un carré est toujours positif) et $-2<0$ alors $f'(x)<0$

Donc on obtient le tableau suivant :

x	-15	5	10
Signe de f'	-	‖	-
Variations de f	- 0.1 ↘	‖	↘ 0.4

d) $y=f'(-1)\times(x-(-1))+f(-1)\Leftrightarrow y=f'(-1)\times(x+1)+f(-1)$

$f(-1)=\dfrac{2}{-1-5}=\dfrac{2}{-6}=\dfrac{-1}{3}$ et $f'(-1)=\dfrac{-2}{(-1-5)^2}=\dfrac{-2}{(-6)^2}=\dfrac{-2}{36}=\dfrac{-1}{18}$ donc $y=\dfrac{-1}{18}(x+1)-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow$

$y=\dfrac{-1}{18}x-\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow y=\dfrac{-1}{18}x-0.39$

Exercice 7 :

a) $f'(x)=\dfrac{1\times(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-x}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ en utilisant la règle : $\left(\dfrac{u}{v}\right)^2=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ sur $[-20;20]$

où $\begin{matrix}u=x & u'=1\\ v=x-1 & v'=1-0=1\end{matrix}$

b)

x	-20	1	20
-1	-		-
$(x-1)^2$	+	0	+
Signe de f'	-		-
Variations de f	-0.95 ↘		↘ 1.05

$x-1=0$ ssi $x=1$
Attention c'est donc la valeur interdite

(le dénominateur ne peut pas valoir 0)

Exercice 8 :

$f'_1(x)=-x^2+8x$

$f'_2(x)=6x-12$

Exercice 9 :

1. On trouve : $f('x)=-6x+4$
2. Etude du signe de f' sur IR : f' s'annule en $x=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

D'après le cours sur les fonctions affines, on a :

x	-5	$\frac{2}{3}$	5
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-102 ↗	-5,7	↘ -62

3. $y = f'(1)\times(x-1)+f(1)$, $f(1)=-6$ et $f'(1)=-2$ donc $y=-2\times(x-1)-6 \Leftrightarrow y=-2x-4$

Exercice 10 :

1. $f'(x)=x^2-3x+2$

2. Signe du trinôme : x^2-3x+2.

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases} \qquad \Delta=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1$$

Le trinôme a deux racines : $x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=2$; $x_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1}=1$

Tableau de signes du trinôme :

x	-10	1		2	10
Signe du trinôme : x^2-3x+2	Signe de a : +	0	Signe de $-a$: -	0	Signe de a : +

3.

x	-10	1		2	10
Signe de f'	+	0	-	0	+
Variations de f	2 ↗	0,8	↘	1,7	↗ 2

Exercice 11 :

a) $x+2=0$ ssi $x=-2$ qui est la valeur interdite de f.

b) $f'(x)=\dfrac{0\times(x+2)-(-5)\times1}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{(x+2)^2}$ en utilisant la règle : $\left(\dfrac{u}{v}\right)^2=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ sur $[-5;10]$

c) Comme sur $[-5;10]$: $(x+2)^2>0$ et $5>0$ alors $f'(x)>0$

Donc on obtient le tableau suivant :

x	-5	-2	10
$f'(x)$	+	||	+
$f(x)$	1.67 ↘	||	↘ -0.42

d) $y=f'(0)\times(x+0)+f(0)$, $f(0)=-\dfrac{5}{2}=-2.5$ et $f'(0)=\dfrac{5}{4}=1.25$ donc $y=-2.5x+1.25$

Exercice 12 :

1. Tableau de valeurs :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-22	-10	0	8	14	18	20	20	18	14	8	0	-10

2. La fonction dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $[-6 ; 6]$ par :

$$\boxed{f'(x)=-2x+1}$$

3. $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

La fonction f s'annule pour $\boxed{x=\dfrac{1}{2}}$.

4.

x	-6		$\frac{1}{2}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-22	$\nearrow$	$20,25$	$\searrow$	-10

6. La tangente à C_f au point d'abscisse *-4* a pour coefficient directeur *f '(-4)* :

$f'(-4) = -2\times(-4)+1 = 9$.

$f(-4) = 0$

Donc $y = f'(-4)(x+4) + f(-4) \Leftrightarrow y = 9(x+4)+0 \Leftrightarrow \boxed{y = 9x+36}$

Exercice 13 :

$$i'(x) = \frac{2\times(3x+5)-(2x-1)\times 3}{(3x+5)^2} = \frac{6x+10-6x+3}{(3x+5)^2} = \frac{13}{(3x+5)^2}$$

Exercice 14 :

$$f_4'(x) = \frac{0\times(3x-5)-1\times 3}{(3x-5)^2} = \frac{-3}{(3x-5)^2}$$

$$f_5'(x) = \frac{-2\times(1-x)-(-2x)\times(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-2+2x-2x}{(1-x^2)^2} = \frac{-2}{(1-x^2)^2}$$

Exercice 15 :

a) $\boxed{f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}}$ en utilisant la règle : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ sur $[1,2;9]$

b) Comme sur $[1,2;9]$: $(x-1)^2 > 0$ et $-2 < 0$ alors $f'(x) < 0$

Donc on obtient le tableau suivant :

x	1,2		9
$f'(x)$		-	
$f(x)$	10	$\searrow$	0,25

c) On entre la fonction dans la calculatrice et on utilise la table de la calculatrice pour obtenir les valeurs manquantes du tableau :

x	1,2	1,5	2	3	5	9
$f(x)$	10	4	2	1	0,5	0,25

d)