Ex 1 : 1) on pose $f(x)=x-\frac{1}{x}$ avec $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$

donc $f'(x)=x^2+\frac{1}{x^2}>0$

Tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

donc f est strict croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$

puisque $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ainsi f est injective de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$ (*généralisation du TVI*)

En revanche sur $\mathbb{R}^*$, on vérifie que $f(1-\sqrt{2})=f(1+\sqrt{2})=2$

donc f est non-injective de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$

2) a) on pose $f(x)=x\,e^x$ avec $x\in\mathbb{R}$; alors $f'(x)=(x+1)e^x$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	↘	-1/e	↗	$+\infty$

Ainsi sur $]-\infty;-1]$, f est strict décroissante donc f est injective de $]-\infty;-1]$ vers $[-\frac{1}{e};0[$; de même sur $]-1;+\infty[$, f est strict croissante donc f est injective de $[-1;-\infty[$ vers $[-\frac{1}{e};+\infty[$

b) Enfin on déduit du tableau de variations que $\Im(f)=[-\frac{1}{e};+\infty[$

3) on pose $f(x)=x^n.\ln(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x>0$

ainsi $f'(x)=(n\ln(x)+1)x^{n-1}$ donc $f'(x)=0$ donne $x=e^{-1/n}$

avec $f(e^{-1/n})=\frac{-1}{ne}<0$; or $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ (th usuel) et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

donc f est non injective de $]0;+\infty[$ vers $[-\frac{1}{ne};+\infty[$

4) a) on pose $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

donc $f'(x)=\frac{x+0{,}5}{\sqrt{x^2+x+1}}>0$; $f'(x)=0$ donne $x=\frac{-1}{2}$ et $f(\frac{-1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

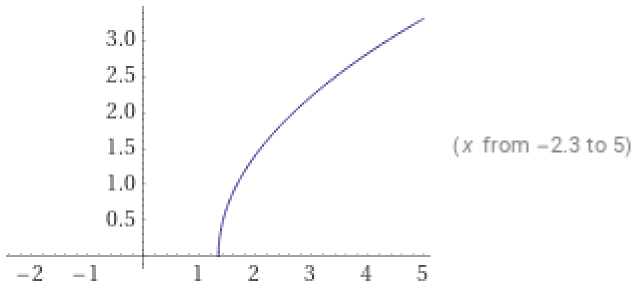
Tableau de variations :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{3}/2$	↗	$+\infty$

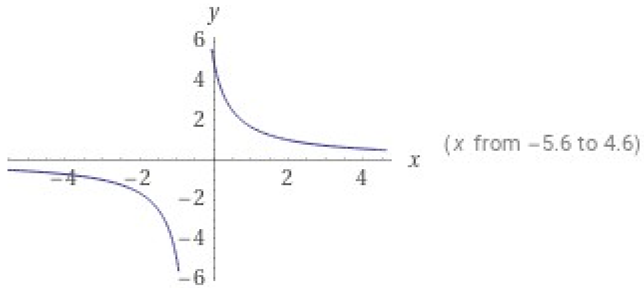
Donc f est non injective de $\mathbb{R}$ vers $[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty[$

b) l'image de l'intervalle $]-2;4[$ est : $\Im(]-2;4])=[\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{21}]\backslash\{\sqrt{3}\}$

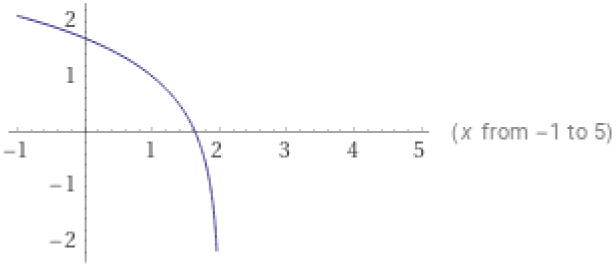
Ex 2 : 1) on pose $f(x)=\sqrt{3x-4}$ avec $x\in[\frac{4}{3};+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1{,}5}{\sqrt{3x-4}}$



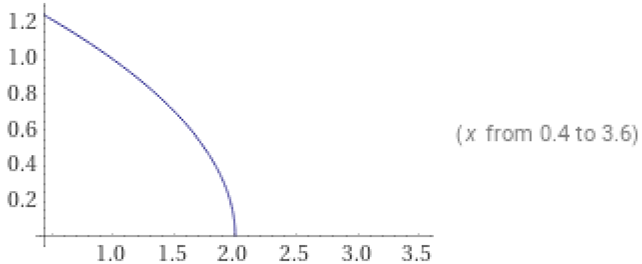
2) on pose $f(x)=\frac{5}{2x+1}$ avec $x\neq -0{,}5$ et $f'(x)=\frac{-10}{(2x+1)^2}$



3) on pose $f(x)=1+\ln(2-x)$ avec $x<2$ et $f'(x)=\dfrac{1}{x-2}<0$



Ex 3 : 1) on pose $f(x)=\sqrt{2-x}$ avec $x\leqslant 2$ et $f'(x)=\dfrac{-0{,}5}{\sqrt{2-x}}<0$



2) les points fixes de f vérifient : $f(x)=x$ donc $\sqrt{2-x}=x$ avec $x>0$ soit $x^2+x-2=0$ donc $x=1$ ou $x=-2$ or $-2<0$ donc le seul point fixe de f est $x_0=1$

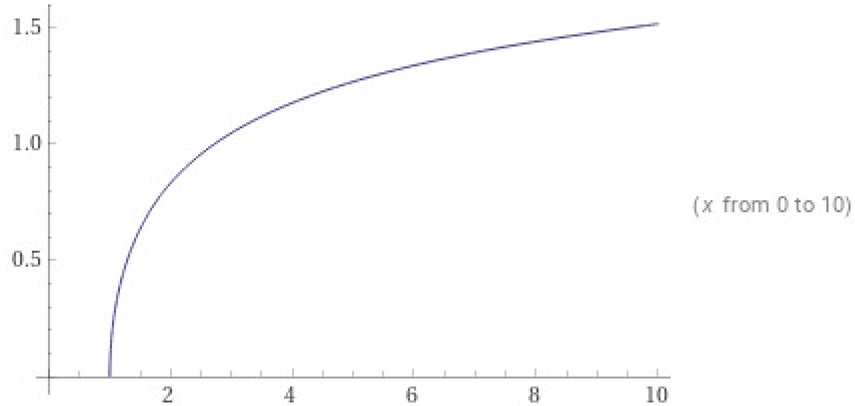
3) l'image de $[-2;2]$ par f est : $\Im([-2;2])=[0;2]\subset[-2;2]$
l'image de $[0;2]$ par f est : $\Im([0;2])=[0;\sqrt{2}]\subset[0;2]$
donc les intervalles $[-2;2]$ et $[0;2]$ sont stables par f

Ex 4 : 1) on pose $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ avec $x\in[1;+\infty[$
on obtient $f'(x)=\dfrac{1{,}5x^2}{\sqrt{x^3-1}}>0$ donc f est strict croissante de $[1;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$ donc d'après le *TVI strict monotone* on déduit que f est bijective de $[1;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$

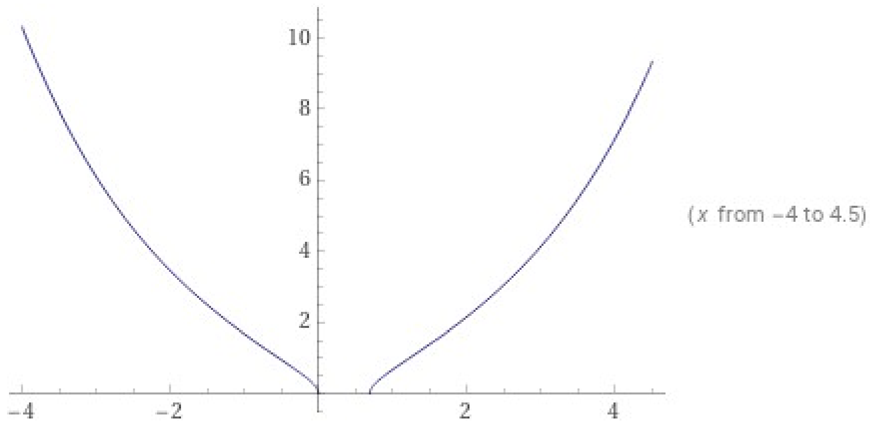
2) soit $y=\sqrt{x^3-1}$ donc $y^2=x^3-1$ donc $x=\sqrt[3]{1+y^2}$ donc $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{1+y^2}$
ainsi : $\forall y\in[0;+\infty[$, $\exists!\, x\in[1;+\infty[$ tel que $x=f^{-1}(y)$
donc on vérifie que f est bijective de $[1;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$

Ex 5 : on pose $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ avec $x\in[1;+\infty[$
$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0$ donc f est strict croissante de $[1;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$
donc d'après le *TVI strict monotone* on déduit que f est bijective de $[1;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$
de plus si $y=\sqrt{x^2-1}$ alors $x=\sqrt{y^2+1}$ donc $f^{-1}(y)=\sqrt{y^2+1}$ avec $y>0$

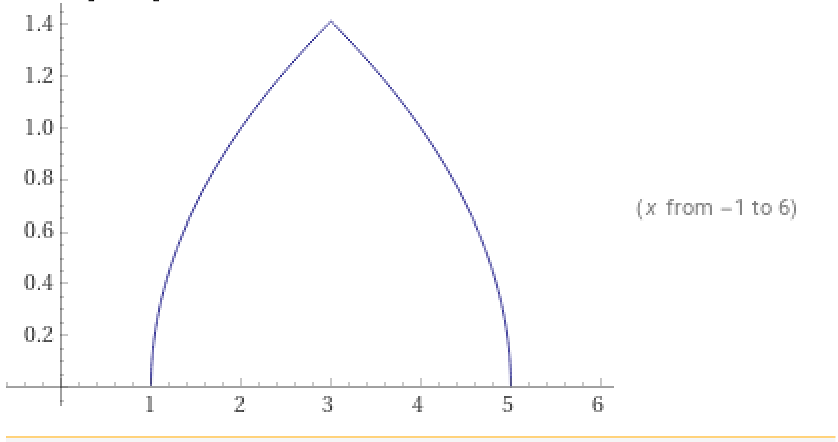
Ex 9 : 1) soit $f(x)=\sqrt{\ln x}$ alors f est définie sur $[1;+\infty[$ et f est dérivable sur $]1;+\infty[$



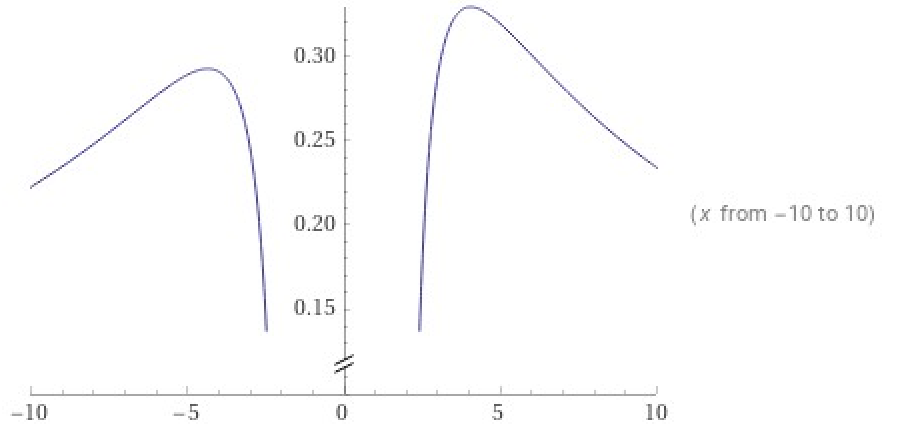
2) soit $f(x)=\sqrt{e^x+2e^{-x}-3}$ alors f est définie sur $]-\infty;0]\cup[\ln 2;+\infty[$ et f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]\ln 2;+\infty[$



3) soit $f(x)=\sqrt{2-|x-3|}$ alors f est définie sur $[1;5]$ et f est dérivable sur $]1;5[$



4) soit $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$ alors f est définie sur $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ et f est dérivable sur $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$



Ex 10 : 1) soit $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$; $f(-x)=-f(x)$ pour tout $x\neq-\sqrt{3}$ et $x\neq\sqrt{3}$ donc f est impaire sur $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

de plus f est dérivable sur $]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3};\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$ avec $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}$ pour tout $x\neq-\sqrt{3}$ et $x\neq\sqrt{3}$

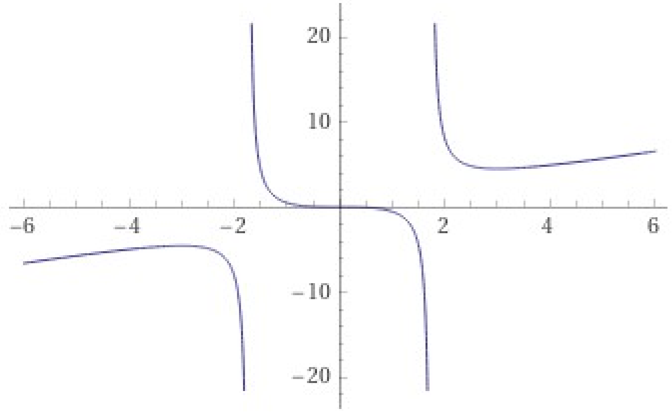


Tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	−	||	−	0	+	
f					||		0		||				

(les valeurs & limites sont laissées au lecteur …)

de plus $f''(x)=\dfrac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}$; on obtient le tableau de convexité

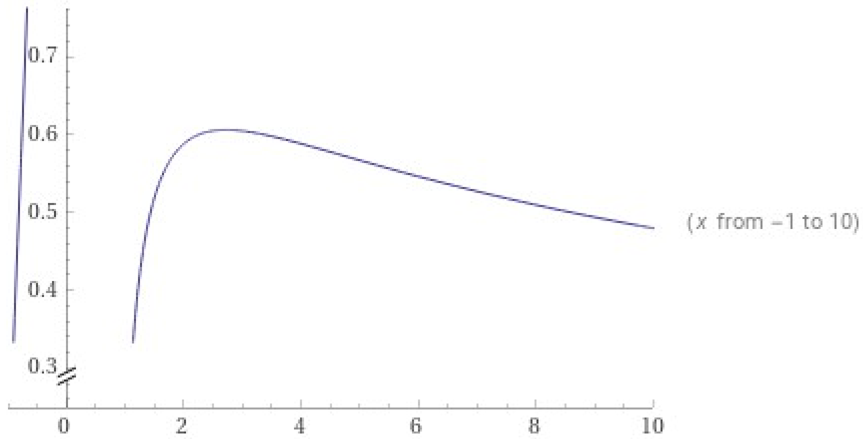
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	||	+	0	−	||	+	
f		Concave	||	convexe	|	concave	||	convexe	

Enfin $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+3}=\dfrac{x^3+3x}{x^2+3}=x+\dfrac{3x}{x^2+3}$ pour tout $x\neq-\sqrt{3}$ et $x\neq\sqrt{3}$
(on peut aussi effectuer une division Euclidienne)

donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x}{x^2+9}=0$

donc la droite $(d): y=x$ est asymptote oblique à C_f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$

2) soit $f(x)=\sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$; f est définie sur $[-1;0[\cup[1;+\infty[$ et f est dérivable sur $]-1;0[\cup]1;+\infty[$; ces domaines ne sont pas symétriques par rapport à 0 , donc f n'est ni paire ni impaire



on obtient $f'(x)=\frac{1-\ln|x|}{2\sqrt{|x|^{3,5}}.\ln|x|}$ pour $x\in[-1;0[\cup[1;+\infty[$

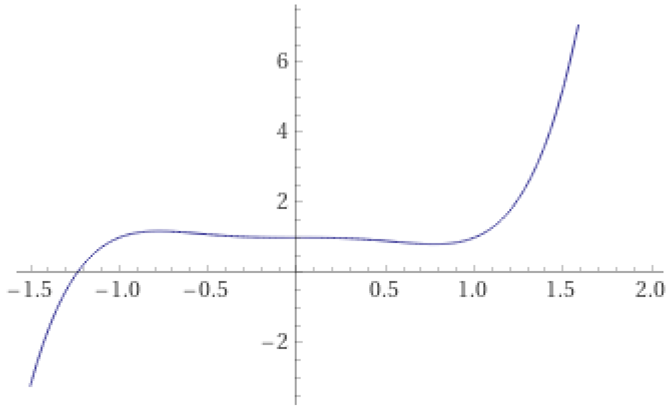
Tableau de variations :

x	-1		0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|		|	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ |		| 0	$\nearrow$	$\sqrt{1/e}$	$\searrow$	0

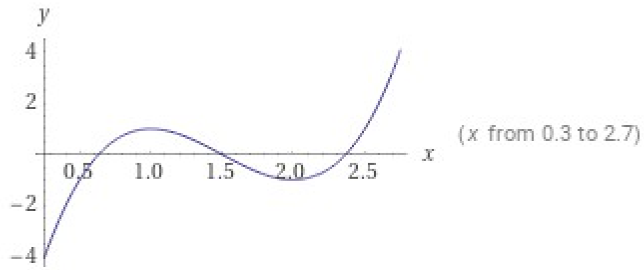
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la droite $(d): y=0$ est asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$

$\lim_{x\to 0, x<0} f(x)=+\infty$ donc la droite $(d'): x=0$ est asymptote verticale à C_f

Ex 11 : 1) $f(x)=x^5-x^3+1$; f possède une seule racine réelle ($\alpha\simeq-1,24$) car $f'(x)=5x^4-3x^2=(x^2)(5x^2-3)$ s'annule en $x_0=0$, $x_1=-\sqrt{0,6}$ et $x_2=\sqrt{0,6}$ donc le TVI ne s'applique que sur l'intervalle $[-2;-1]$



2) $f(x)=4x^3-18x^2+24x-9=(2x-3)(2x^2-6x+3)$ pour $x\in\mathbb{R}$
donc les racines de f sont $\alpha=1,5$, $\beta=1,5-\sqrt{1,5}$ et $\gamma=1,5+\sqrt{1,5}$



Ex 12 : 1) $f(x)=e^{-x}$ donc $f^{(k)}(x)=(-1)^k.e^{-x}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{1}{x}$ donc $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k.k!}{x^{k+1}}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$

3) $f(x)=x^\alpha$ donc $f^{(k)}(x)=\frac{\alpha!}{(\alpha-k)!}x^{\alpha-k}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$

Ex 14 : 1) on pose $f(x)=x^x=e^{x.\ln(x)}$ avec $x>0$

ainsi $f'(x)=(\ln x+1)e^x$, $f'(x)=0$ donne $x=\frac{1}{e}$

$\lim_{x\to 0, x>0} f(x)=e^0=1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Tableau de variations :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	↘	$e^{-1/e}$	↗	$+\infty$

De plus $f''(x)=\dfrac{1+x(\ln x+1)^2}{x}.e^{x.\ln(x)}$ pour tout $x>0$

ainsi $1+x(\ln x+1)^2>0$ pour $x>0$ on déduit que $f''(x)>0$

donc f est convexe sur $]0;+\infty[$

2) on pose $f(x)=x^x=e^{x.\ln(x)}$ avec $x>0$

on cherche à résoudre l'équation $(E): y=f(x)=x^x$ avec $y\in\mathbb{R}$

on effectue alors une disjonction de cas :

- si $y<e^{-1/e}$ alors (E) ne possède aucune solution
- si $y=e^{-1/e}$ alors (E) possède une solution $x_0=\dfrac{1}{e}$
- si $e^{-1/e}<y<1$ alors (E) possède deux solutions
- si $y\geqslant 1$ alors (E) possède une solution

Ex 15 : 1) on pose l'équation $x\ln(x)=1$ avec $x>0$

soit $f(x)=x\ln(x)-1$ avec $x>0$ alors $f'(x)=\ln(x)+1$

$f'(x)=0$ donne $x=\dfrac{1}{e}$

Tableau de variations :

x	0		$1/e$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
f	-1	↘	$-e^{-1/e}-1$	↗	0	↗	$+\infty$

On applique le TVI sur $[\frac{1}{e};+\infty[$ et on déduit que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution $\alpha>\dfrac{1}{e}$ puisque $-e^{-1/e}-1<0$

2) on pose l'équation $e^{-x^2}=e^x-1$ pour $x\in\mathbb{R}$

soit $f(x)=e^{-x^2}-e^x+1$ avec $x\in\mathbb{R}$

alors $f'(x)=(-2x)e^{-x^2}-e^x$; $f'(x)=0$ possède 2 racines x_1 et x_2 avec $x_1<x_2<0$

Tableau de variations :

x	-1		x_1		x_2		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$		$-$	
f	1	↘	y_1	↗	y_2	↘		↘	0	↘	$-\infty$

On applique le TVI sur $[x_2;+\infty[$ et on déduit que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution $\alpha>0$ puisque $y_2>0$

3) on pose l'équation $1+\dfrac{x}{\ln(x)}=x$ pour $x>0$

soit $f(x)=1+\dfrac{x}{\ln(x)}-x$ pour $x>0$ donc $f'(x)=\dfrac{-1}{(\ln x)^2}+\dfrac{1}{\ln x}-1$

soit encore $f'(x)=\dfrac{-1+\ln(x)-(\ln x)^2}{(\ln x)^2}=\dfrac{-1+\ln(x)(1-\ln x)}{(\ln x)^2}<0$

[on étudie éventuellement $g(x)=-1+\ln(x)(1-\ln x)$ pour montrer que $g(x)<0$]

Tableau de variations :

x	0		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	
f	1	↘	0	↘	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

On applique le TVI sur $[\frac{1}{e};+\infty[$ et sur $]1;+\infty[$ et on déduit que l'équation $f(x)=0$ possède 2 solutions $0<\alpha<1$ et $\beta>1$