Logarithme, exponentielle et puissances

15

4) ◷◷ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=1$ et $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

16 ◷◷

1) Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1+\alpha x$ pour tous $\alpha\in\mathbb{R}$ et $x>-1$.
2) En déduire que pour tous $\alpha\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)\geqslant(n+1)^\alpha.$$

17 ◷◷ Montrer que pour tout $n\geqslant 2$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant e\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

18 Montrer, en étudiant une fonction BIEN CHOISIE, que :

1) ◷ pour tout $x\leqslant 1$: $\quad e^x\leqslant 1+x+\dfrac{ex^2}{2}$.
2) ◷◷ pour tout $x\in]0,1[$: $\quad x^x(1-x)^{1-x}\geqslant\dfrac{1}{2}$.
3) ◷◷ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\quad \dfrac{e^x-1}{x}\geqslant x+e-2$.
4) ◷◷◷ pour tout $x>0$:

$$x\ln x-(x-1)\geqslant\frac{3(x-1)^2}{2(x+2)}.$$

22 ◷◷◷ Montrer que $e^x\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\geqslant 0$.

Calculs de limites

29 ◷◷

1) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x^2+1}$. b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2x)}}$.

   c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^\beta+1}$ $\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

   d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$.

   e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x^\alpha}-\sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad(\alpha\in\mathbb{R})$.

2) a) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{x^\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$. b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{e^{2x}+x-1}$.

   c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^\beta-1}{x^\alpha-1}$ $\quad(\alpha\in\mathbb{R}^*,\beta\in\mathbb{R})$.

3) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}(3x)}$ et $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{sh}(3x)}$.

   b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln(e^x+1)}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\ln(e^x+1)}$.

   c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^\alpha-1}{\ln x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^\alpha-1}{\ln x}$ $\quad(\alpha\in\mathbb{R})$.

28

1) ◷ Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{th}x}{x}$? Vérifier que $\operatorname{th}(2x)=\dfrac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2) ◷◷◷ En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2^k}\right)=\frac{x}{\operatorname{th}x}.$$

26 ◷◷

1) Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque en résolvant l'équation $y=\operatorname{sh}x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
2) Même question avec th, bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
3) Même question avec ch, bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.