INTRODUCTION À LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

1 Vérifier que $X^5 - 2X^4 + 6X^3 - 4X^2 + 3X + 1$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

---

2 On pose $P = X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 5X^2 - 4X - 12$.

1) Vérifier que -2 et 1 en sont racines, puis déterminer leurs multiplicités respectives.
2) En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

---

3 On pose $P = X^4 - 2X^3 - X - 1$.

1) Calculer la division euclidienne de P par P'. En déduire le signe de $P(\alpha)$ pour toute racine réelle α de P'.
2) Déterminer le nombre de racines réelles de P.

---

4 Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes :

1) $\dfrac{X+2}{X(X+4)}$.
2) $\dfrac{X}{(X+1)\left(X^2+2X+3\right)}$.
3) $\dfrac{X^4 - 2X^3 + 6X + 6}{(X+1)^2(X-2)}$.
4) $\dfrac{1}{X(X+1)^2\left(X^2+1\right)}$.
5) $\dfrac{3X^2 + X + 7}{\left(X^2+9\right)^2}$.

PCSi/MPSi Colle n° 6 : Algèbre générale mars 2023

INTRODUCTION À LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

1 Vérifier que $X^5 - 2X^4 + 6X^3 - 4X^2 + 3X + 1$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

2 On pose $P = X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 5X^2 - 4X - 12$.

1) Vérifier que -2 et 1 en sont racines, puis déterminer leurs multiplicités respectives.
2) En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

3 On pose $P = X^4 - 2X^3 - X - 1$.

1) Calculer la division euclidienne de P par P'. En déduire le signe de $P(\alpha)$ pour toute racine réelle α de P'.
2) Déterminer le nombre de racines réelles de P.

4 Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes :

1) $\dfrac{X+2}{X(X+4)}$.
2) $\dfrac{X}{(X+1)\left(X^2+2X+3\right)}$.
3) $\dfrac{X^4 - 2X^3 + 6X + 6}{(X+1)^2(X-2)}$.
4) $\dfrac{1}{X(X+1)^2\left(X^2+1\right)}$.
5) $\dfrac{3X^2 + X + 7}{\left(X^2+9\right)^2}$.