Cosinus, sinus, tangente

1

1) Calculer $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, puis $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
2) Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$, puis $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

4 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1) $\cos(3x)=\sin x$. 2) $\cos x+\sin x=1+\tan x$.
3) $\sin x+\sin(2x)=0$. 4) $\tan(2x)=3\tan x$.
5) $2\sin x+\sin(3x)=0$. 6) $3\tan x=2\cos x$.
7) $\cos x=\sqrt{3}\sin x$. 8) $2\cos(4x)+\sin x=\sqrt{3}\cos x$.

7

1) Montrer que $\tan x > x$ pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
2) Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{x}{\sin x}$ est bijective de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur son image que l'on précisera.

8 Montrer que : $\sin x \geqslant x-\frac{x^2}{\pi}$ pour tout $x\in[0,\pi]$ en commençant par travailler sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et en concluant ensuite sans nouvelle étude de fonction.

16 Étudier les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x}$. 2) $x \longmapsto x\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x-1}$.

15 Montrer que pour tout $x\geqslant 0$: $\mathrm{Arctan}\,x \geqslant \frac{x}{x^2+1}$.

6 Montrer que pour tout $n\geqslant 2$:

$$2\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\qquad (n\!-\!1 \text{ symboles } \sqrt{\cdot}).$$

PCSi/MPSi Colle n° 8 : Complexes & Trigonométrie 2023

Cosinus, sinus, tangente

1

1) Calculer $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, puis $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
2) Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$, puis $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

4 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1) $\cos(3x)=\sin x$. 2) $\cos x+\sin x=1+\tan x$.
3) $\sin x+\sin(2x)=0$. 4) $\tan(2x)=3\tan x$.
5) $2\sin x+\sin(3x)=0$. 6) $3\tan x=2\cos x$.
7) $\cos x=\sqrt{3}\sin x$. 8) $2\cos(4x)+\sin x=\sqrt{3}\cos x$.

7

1) Montrer que $\tan x > x$ pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
2) Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{x}{\sin x}$ est bijective de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur son image que l'on précisera.

8 Montrer que : $\sin x \geqslant x-\frac{x^2}{\pi}$ pour tout $x\in[0,\pi]$ en commençant par travailler sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et en concluant ensuite sans nouvelle étude de fonction.

16 Étudier les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x}$. 2) $x \longmapsto x\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x-1}$.

15 Montrer que pour tout $x\geqslant 0$: $\mathrm{Arctan}\,x \geqslant \frac{x}{x^2+1}$.

6 Montrer que pour tout $n\geqslant 2$:

$$2\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\qquad (n\!-\!1 \text{ symboles } \sqrt{\cdot}).$$