SOS Maths 1ère   Préparation DS commun - *Corrigé*   Mars 2023

Ex 1 : Extrait DC 2020

Partie I (3,5 points = 1 + 2,5)

1°) $f(x)=\dfrac{x^2+96x}{x-4}$

$f'(x)=\dfrac{(2x+96)(x-4)-(x^2+96x)\times 1}{(x-4)^2}=\dfrac{2x^2-8x+96x-384-x^2-96x}{(x-4)^2}=\dfrac{x^2-8x-384}{(x-4)^2}$

2°) $x^2-8x-384$; $\Delta=(-8)^2-4\times 1\times(-384)=1600$

$x_1=\dfrac{-(-8)-\sqrt{1600}}{2\times 1}=\dfrac{8-40}{2}=-16$; $x_1=\dfrac{-(-8)+\sqrt{1600}}{2\times 1}=\dfrac{8+40}{2}=24$

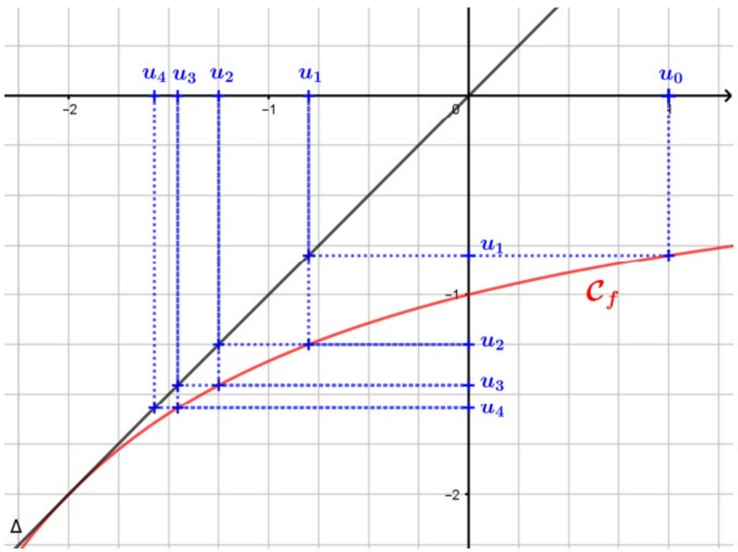
x	4		24		$+\infty$
$x^2-8x-384$		−	0	+	
$(x-4)^2$	0	+	|	+	
$f'(x)$	||	−	0	+	
$f(x)$	||	↘	144	↗	

Ex 2 : Extrait DC 2020

Partie I (3 points = 0,75 + 0,75 + 1 + 0,5)

1°) $u_1=\dfrac{-4}{4+u_0}=\dfrac{-4}{4+1}=-\dfrac{4}{5}$ $u_2=\dfrac{-4}{4+u_1}=\dfrac{-4}{4+\left(-\frac{4}{5}\right)}=\dfrac{-4}{\frac{20}{5}-\frac{4}{5}}=\dfrac{-4}{\frac{16}{5}}=-4\times\dfrac{5}{16}=-\dfrac{5}{4}$

2°) $u_5\simeq -1{,}647$ $u_{10}\simeq -1{,}813$ $u_{15}\simeq -1{,}872$ $u_{20}\simeq -1{,}903$



4°) La suite (u_n) semble strictement décroissante et semble converger vers -2.

Partie II (3 points = 0,25 + 1 + 0,75 + 0,75 + 0,25)

1°) $v_{20}=\dfrac{2-6\times 20}{2+3\times 20}=\dfrac{-118}{62}=-\dfrac{59}{31}$

2°) a) $g'(x)=\dfrac{-6(2+3x)-(2-6x)\times 3}{(2+3x)^2}=\dfrac{-12-18x-6+18x}{(2+3x)^2}=\dfrac{-18}{(2+3x)^2}$

x	0 $\quad$ $+\infty$
-18	−
$(2+3x)^2$	+
$g'(x)$	−
$g(x)$	1 ↘

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n=g(n)$ et la fonction g est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

La fonction g admet un maximum sur $[0\,;\,+\infty[$ égal à 1, donc pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $v_n\leqslant 1$

3°) a) Pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $g(x)+2=\dfrac{2-6x}{2+3x}+\dfrac{4+6x}{2+3x}=\dfrac{6}{2+3x}$

$x\in[0\,;\,+\infty[$ donc $g(x)+2>0$

b) Pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$ on a $g(x)+2>0$ donc $g(x)>-2$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $v_n>-2$.

Partie III (2 points = 1,25 + 0,5 + 0,25)

1°) Pour n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{-4}{4+v_n}=\dfrac{-4}{4+\frac{2-6n}{2+3n}}=\dfrac{-4}{\frac{8+12n}{2+3n}+\frac{2-6n}{2+3n}}=\dfrac{-4}{\frac{10+6n}{2+3n}}=-4\times\dfrac{2+3n}{10+6n}=-2\times 2\times\dfrac{2+3n}{2\times(5+3n)}=-2\times\dfrac{2+3n}{5+3n}=\dfrac{-4-6n}{5+3n}$

2°) Pour n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\dfrac{2-6(n+1)}{2+3(n+1)}=\dfrac{2-6n-6}{2+3n+3}=\dfrac{-4-6n}{5+3n}=\dfrac{-4}{4+v_n}$

3°) $v_0=\dfrac{2-6\times 0}{2+3\times 0}=\dfrac{2}{2}=1=u_0$ et d'après la question précédente,

les deux suites (u_n) et (v_n) vérifient la même relation de récurrence donc elles sont égales.

Partie IV (2 points = 1,25 + 0,75)

1°) L'un ou l'autre des algorithmes ci-dessous convient :

```
n=0
u=1
while u>-1.98:
    n=n+1
    u=-4/(4+u)
print(n)
```

```
n=0
u=1
while u>-1.98:
    n=n+1
    u=(2-6*n)/(2+3*n)
print(n)
```

2°) $v_{99} = \dfrac{2-6\times 99}{2+3\times 99} \simeq -1{,}9799 \geqslant -1{,}98$ et $v_{100} = \dfrac{2-6\times 100}{2+3\times 100} \simeq -1{,}9801 < -1{,}98$

donc la valeur de n que l'algorithme affichera est 100.

Ex 3 : Extrait DC 2020

(Faire une figure précise de la situation)

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Les points E, F et G sont définis par :

$$\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AD} \quad ; \quad \overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} \quad ; \quad \overrightarrow{DG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

Démontrer que les droites (EF) et (AG) sont parallèles.

On pourra exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ par exemple (ou tout autre couple de vecteurs non colinéaires) ou bien raisonner dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$

$= -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CD}$

$= -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \dfrac{3}{2}\overrightarrow{DC}$

$= -2\overrightarrow{AD} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$

$= \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

On constate que $\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{AG}$

donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires

donc les droites (EF) et (AG) sont parallèles.

Figure :