Correction 1

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$2\cdot(x-3)(x-1) = (2\cdot x-6)(x-1)$

$= 2\cdot x^2 - 2\cdot x - 6\cdot x + 6 = 2\cdot x^2 - 8\cdot x + 6 = f(x)$

b. Utilisons la forme factorisée :

$f(x) = 0$

$2\cdot(x-3)(x-1) = 0$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$2 = 0$	$x-3=0$	$x-1=0$
Impossible	$x=3$	$x=1$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{1\,;3\}$

c. De la forme factorisée, on en déduit le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$2\cdot(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = [1\,;3]$.

2. a.
- $f(x)+2 = (2\cdot x^2 - 8\cdot x + 6) + 2 = 2\cdot x^2 - 8\cdot x + 8$
- $2(x-2)^2 = 2(x^2 - 4\cdot x + 4) = 2\cdot x^2 - 8\cdot x + 8$

On en déduit l'identité : $f(x)+2 = 2(x-2)^2$

b. Le carré d'un nombre étant toujours positif ou nul, pour tout nombre réel x, on a :

$(x-2)^2 \geqslant 0$

$2\cdot(x-2)^2 \geqslant 0$

D'après la question précédente :

$f(x)+2 \geqslant 0$

$f(x) \geqslant -2$

Correction 2

- Le carré $ABCD$ a pour aire : $\mathcal{A}_1 = x\times x = x^2$
- Le carré $CEFG$ a pour aire : $\mathcal{A}_2 = (6-x)(3-x)$

L'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée a pour expression :

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = x^2 + (6-x)(3-x)$

$= x^2 + 18 - 6\cdot x - 3\cdot x + x^2 = 2\cdot x^2 - 9\cdot x + 18$

Souhaitant que l'aire totale mesure $8\,cm^2$, on résoud l'équation :

$\mathcal{A} = 8$

$2\cdot x^2 - 9\cdot x + 18 = 8$

$2\cdot x^2 - 9\cdot x + 18 - 8 = 0$

$2\cdot x^2 - 9\cdot x + 10 = 0$

Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-9)^2 - 4\times 2\times 10 = 81 - 80 = 1$

On a la simpification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cette équation admet les deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \dfrac{-(-9)-1}{2\times 2} = \dfrac{9-1}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \dfrac{-(-9)+1}{2\times 2} = \dfrac{9+1}{4} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

On en déduit l'ensemble de cette équation : $\mathcal{S} = \left\{2\,;\dfrac{5}{2}\right\}$

Correction 3

On a :

- Le carré $AMNP$ a pour aire : $\mathcal{A}_1 = AM^2 = x^2$
- Le triangle MNB rectangle en M a pour aire :
  $\mathcal{A}_2 = \dfrac{MB\times MN}{2} = \dfrac{(19-x)\times x}{2}$

Ainsi, l'aire du polygone $ABNP$ admet pour expression :

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = x^2 + \dfrac{(19-x)\times x}{2} = x^2 + \dfrac{19x - x^2}{2}$

$= x^2 + \dfrac{19}{2}\cdot x - \dfrac{1}{2}\cdot x^2 = \dfrac{1}{2}\cdot x^2 + \dfrac{19}{2}\cdot x$

Pour déterminer la valeur de x telle que le polygone $ABNP$ ait une aire de $91\,m^2$, résolvons l'équation :

$\mathcal{A} = 91$

$\dfrac{1}{2}\cdot x^2 + \dfrac{19}{2}\cdot x = 91$

$x^2 + 19\cdot x = 182$

$x^2 + 19\cdot x - 182 = 0$

Le polynôme du membre de droite est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 19^2 - 4\times 1\times(-182) = 361 + 728 = 1089$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1089} = 33$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cett équation admet les deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \dfrac{-19-33}{2\times 1} = \dfrac{-52}{2} = -26$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \dfrac{-19+33}{2\times 1} = \dfrac{14}{2} = 7$

Le nombre x représentant une longueur, sa valeur doit être positive. On en déduit qu'il n'existe qu'une solution qui est : $x = 7$.

Correction 4

- l'aire du triangle rectangle est :
  $\mathcal{A}_1 = \dfrac{x\times x}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot x^2$
- l'aire du trapèze est :

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\left[5+\left(5-x\right)\right]\times\left(5-x\right)}{2} = \frac{\left(10-x\right)\left(5-x\right)}{2}$$
$$= \frac{50-10x-5x+x^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{15}{2}\cdot x + \frac{50}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{15}{2}\cdot x + 25$$

Ainsi, l'aire totale a pour expression :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\cdot x^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{15}{2}\cdot x + 25\right)$$
$$= x^2 - \frac{15}{2}\cdot x + 25$$

Déterminons la valeur de x pour que l'aire de la partie hachurée vale $16\,cm^2$.
Résolvons l'équation :

$$\mathcal{A} = 16$$
$$x^2 - \frac{15}{2}\cdot x + 25 = 16$$
$$x^2 - \frac{15}{2}\cdot x + 25 - 16 = 0$$
$$x^2 - \frac{15}{2}\cdot x + 9 = 0$$

Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(-\frac{15}{2}\right)^2 - 4\times1\times9 = \frac{225}{4} - 36$$
$$= \frac{225}{4} - \frac{144}{4} = \frac{81}{4}$$

On a la simplification suivante :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}} = \frac{9}{2}$$

Le discriminant étant strictement supérieur à 0, on en déduit que le polynôme du membre de gauche admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\left(-\frac{15}{2}\right)-\frac{9}{2}}{2\times1} = \frac{\frac{15}{2}-\frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{6}{2}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\left(-\frac{15}{2}\right)+\frac{9}{2}}{2\times1} = \frac{\frac{15}{2}+\frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{24}{2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

La valeur de x est la mesure indiquée dans le graphique : elle doit être positive et inférieure à 5.
On en déduit qu'il n'existe qu'une possibilité d'obtenir une aire de $16\,cm^2$: c'est de choisir $x = \frac{3}{2}$.

Correction 5

Le nombre m est un nombre dont on ne connait pas la valeur qui permet de définir le polynôme P ayant pour déterminer x dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(2-m\right)^2 - 4\cdot\left(m+1\right)\cdot1$$
$$= 4 - 4\cdot m + m^2 - 4\cdot m - 4 = m^2 - 8\cdot m = m\cdot\left(m-8\right)$$

Le tableau ci-dessous indique le signe du discriminant Δ du polynôme P en fonction du paramètre m. On a :

m	$-\infty$		0		8		$+\infty$
m		$-$	0	$+$		$+$	
$m-8$		$-$		$-$	0	$+$	
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or, le polynôme P n'admet aucune racine lorsque son discriminant est strictement négatif. On en déduit que tel est le cas lorsque : $m \in \left]0\,;8\right[$

Correction 6

1. Déterminons le discriminant du polynôme du membre de gauche :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(-\frac{37}{2}\right) - 4\times1\times85 = \frac{1369}{4} - 340$$
$$= \frac{1369}{4} - \frac{1360}{4} = \frac{9}{4}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\left(-\frac{37}{2}\right)-\frac{3}{2}}{2\times1} = \frac{\frac{37}{2}-\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{34}{2}}{2} = \frac{17}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\left(-\frac{37}{2}\right)+\frac{3}{2}}{2\times1} = \frac{\frac{37}{2}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{40}{2}}{2} = 10$$

2. a. Le rectangle ayant $37\,m$ de périmètre, on doit avoir :

$$2\cdot\left(L+\ell\right) = 37$$
$$L+\ell = \frac{37}{2}$$
$$\ell = \frac{37}{2} - L$$

b. Sachant que l'aire du rectangle est de $85\,m^2$, on a la relation :

$$L\times\ell = 85$$
$$L\cdot\left(\frac{37}{2} - L\right) = 85$$
$$\frac{37}{2}\cdot L - L^2 = 85$$
$$L^2 - \frac{37}{2}\cdot L + 85 = 0$$

D'après la question précédente, on a :

- $L = 10 \implies \ell = \frac{17}{2}$
- $L = \frac{17}{2} \implies \ell = 10$

Le rectangle a $\frac{17}{2}\,m$ pour longueur et $10\,m$ pour largeur.

Correction 7

Notons x sa longueur et y sa largeur.
les deux conditions sur le rectangle s'écrivent par :

- Son périmètre s'exprime par : $2\left(x+y\right) = 19$

- Son aire s'exprime par : $x{\times}y = 12$

De la première équation, on en déduit :

$$\begin{aligned} 2\big(x+y\big) &= 19 \\ x+y &= \frac{19}{2} \\ y &= \frac{19}{2} - x \end{aligned}$$

En substituant la valeur de y en fonction de x dans la seconde équation, on obtient :

$$\begin{aligned} x{\times}y &= 12 \\ x{\times}\Big(\frac{19}{2} - x\Big) &= 12 \\ \frac{19}{2}x - x^2 &= 12 \\ -x^2 + \frac{19}{2}x - 12 &= 0 \\ -2x^2 + 19x - 24 &= 0 \end{aligned}$$

Déterminons le discrimant du membre de gauche :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 19^2 - 4{\times}(-2){\times}(-24) = 361 - 192 = 169$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-19-13}{2{\times}(-2)} = \frac{-32}{-4} = 8 \qquad \Bigg| \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-19+13}{2{\times}(-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

Etudions ces deux cas :

- Si $x{=}8$ alors $y = \dfrac{3}{2}$.
- Si $x{=}\dfrac{3}{2}$ alors $y = 8$.

On en déduit que les dimensions de ce rectangle est $8\,m$ de longueur et $\dfrac{3}{2}\,m$ de largeur.

Correction 8

Le rectangle hachuré a pour dimensions :
$L = x \quad ; \quad \ell = -3{\cdot}x^2 + 9x$
Ainsi, l'aire du rectangle hachuré a pour expression :
$\mathcal{A} = L{\times}\ell = x{\times}\big(-3{\cdot}x^2 + 9{\cdot}x\big) = -3{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2$

Ainsi, pour que l'aire de ce rectangle ait pour mesure 12, il faut que le nombre x réalise l'égalité :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 12 \\ \mathcal{A} &= 12 \\ -3{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2 &= 12 \\ -3{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

D'après l'énoncé, il existe trois nombres a, b, c réels $(a,b,c \in \mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \big(x-2\big)\big(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c\big) \\ -3{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2 - 12 &= \big(x-2\big)\big(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c\big) \end{aligned}$$

On déduit facilement de cette égalité :

- le coefficient du terme de degré 3 valant -3, on en déduit :
  $\Longrightarrow a = -3$
- le coefficient du terme numérique valant -12, on en déduit :
  $\Longrightarrow -2{\times}c = -12 \quad \Longrightarrow \quad c = 6$

Pour déterminer la valeur de b, nous allons développer le membre de droite :

$$\begin{aligned} &\big(x-2\big)\big(-3{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + 6\big) \\ &= -3{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x + 6{\cdot}x^2 - 2b{\cdot}x - 12 \\ &= -3{\cdot}x^3 + \big(b+6\big){\cdot}x^2 + \big(6-2b\big){\cdot}x - 12 \end{aligned}$$

Par identification des coefficients des termes du second et premier degré, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} 9 = b+6 \\ 0 = 6-2b \end{cases}$$

On en déduit que $b{=}3$. Ainsi, on a la factorisation :
$-3{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2 - 12 = \big(x-2\big)\big(-3{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x + 6\big)$

Ainsi, on résoud l'équation :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 12 \\ -3{\cdot}x^3 + 9{\cdot}x^2 - 12 &= 0 \\ \big(x-2\big)\big(-3{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x + 6\big) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$$x - 2 = 0 \quad x = 2 \qquad \Big| \qquad -3{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x + 6 = 0$$

Dans la seconde équation, le membre de gauche est un polynôme du second degré qui admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 3^2 - 4{\times}(-3){\times}6 = 9 + 72 = 81$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-3-9}{2{\times}(-3)} = \frac{-12}{-6} = 2 \qquad \Bigg| \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-3+9}{2{\times}(-3)} = \frac{6}{-6} = -1$$

La valeur $x{=}-1$ ne peut être une solution du problème car x ne peut prendre une valeur négative. Ainsi, il n'existe qu'une possibilité : $x{=}2$.