Correction 1

1. L'expression de la fonction f est définie par le produit des deux fonctions u et v définies par :
$u(x)=5x^2+5x-4 \quad ; \quad v(x)=\sqrt{x}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=10x+5 \quad ; \quad v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=(10x+5)\cdot\sqrt{x}+(5x^2+5x-4)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2x(10x+5)}{2\sqrt{x}}+\frac{5x^2+5x-4}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{20x^2+10x+5x^2+5x-4}{2\sqrt{x}}=\frac{25x^2+15x-4}{2\sqrt{x}}$$

2. La dérivée s'écrit sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est positif ; pour étudier son signe, il suffit de connaître le signe du numérateur.

Le polynôme du second degré définissant ce quotient a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=15^2-4\times25\times(-4)=625>0$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{625}=25$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet donc les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15-25}{50}=\frac{-40}{50}=-\frac{4}{5}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15+25}{50}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$25x^2+15x-4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$					$\|$	$-$	0	$+$	

3. Calculons l'image de $\frac{1}{5}$ par la fonction f :
$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\left[5\times\left(\frac{1}{5}\right)^2+5\times\frac{1}{5}-4\right]\sqrt{\frac{1}{5}}$$
$$=\left(5\times\frac{1}{25}+1-4\right)\sqrt{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{5}+1-4\right)\sqrt{\frac{1}{5}}$$
$$=-\frac{14}{5}\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{14\sqrt{5}}{25}$$

Voici le tableau de variations de la fonction f :

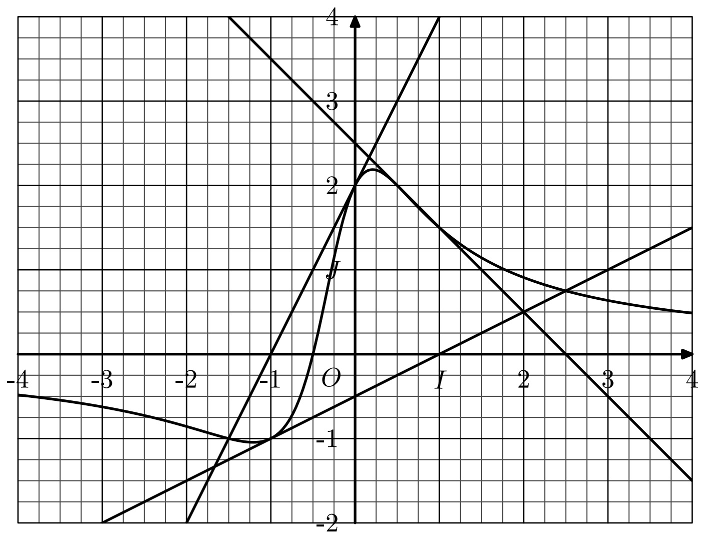
x	0	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
Variation de f	0 $\searrow$	$-\frac{14\sqrt{5}}{25}$	$\nearrow$ $+\infty$

Correction 2

2. a. La fonction f est définie par le quotient des deux fonctions u et v définie par :
$u(x)=4\cdot x+2 \quad ; \quad v(x)=2\cdot x^2+x+1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=4 \quad ; \quad v'(x)=4\cdot x+1$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{4(2x^2+x+1)-(4x+2)(4x+1)}{(2x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{8\cdot x^2+4\cdot x+4-(16\cdot x^2+4\cdot x+8\cdot x+2)}{(2\cdot x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{8\cdot x^2+4\cdot x+4-16\cdot x^2-12\cdot x-2}{(2\cdot x^2+x+1)^2}=\frac{-8\cdot x^2-8\cdot x+2}{(2\cdot x^2+x+1)^2}$$

b. On a les valeurs suivants :

- Le nombre dérivée de la fonction f en -1 a pour valeur :
$$f'(-1)=\frac{-8\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)+2}{\big[2\cdot(-1)^2+(-1)+1\big]^2}=\frac{-8+8+2}{(2-1+1)^2}$$
$$=\frac{2}{2^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
- Le nombre dérivée de la fonction f en 0 a pour valeur :
$$f'(0)=\frac{-8\times0^2-8\times0+2}{\big(2\times0^2+0+1\big)^2}=\frac{2}{1^2}=2$$
- Le nombre dérivée de la fonction f en 0 a pour valeur :
$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-8\times\left(12\right)^2-8\times\left(\frac{1}{2}\right)+2}{\left[2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1\right]^2}=\frac{-2-4+2}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)^2}$$
$$=\frac{-4}{2^2}=-1$$



Correction 3

Une video est accessible

1. La fonction f est définie par le quotient des deux fonctions u et v dont l'expression est :
$u(x)=x^2+x+1 \quad ; \quad v(x)=x+1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=2x+1 \quad ; \quad v'(x)=1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(2x+1)\cdot(x+1) - (x^2+x+1)\cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

2. a. • Déterminons l'équation réduite de la droite (d) :

On a l'image et le nombre dérivée de $-\frac{1}{2}$ par la fonction f :

$$f\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(-\frac{1}{2}\Big) + 1}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}+1}$$
$$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\times 2 = \frac{3}{2}$$

$$f'\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 + 2\times\Big(-\frac{1}{2}\Big)}{\Big(-\frac{1}{2}+1\Big)^2} = \frac{\frac{1}{4}-1}{\Big(\frac{1}{2}\Big)^2}$$
$$= \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{4}\times 4 = -3$$

La formule donnant l'équation réduite d'une tangente à une courbe permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente (d) :

$$y = f'\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big[x - \Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big] + f\Big(-\frac{1}{2}\Big)$$
$$y = -3\cdot\Big(x+\frac{1}{2}\Big) + \frac{3}{2}$$
$$y = -3\cdot x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$
$$y = -3\cdot x$$

• Déterminons l'équation réduite de la droite (Δ) :

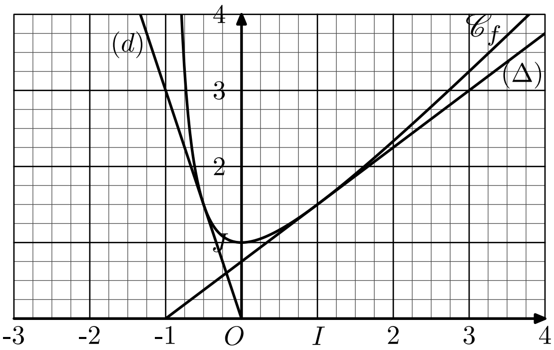
On a l'image et le nombre dérivée de 1 par la fonction f :

$$f(1) = \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$
$$f'(1) = \frac{1^2+2\times 1}{(1+1)^2} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$$

La formule donnant l'équation réduite d'une tangente à une courbe permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente (d) :

$$y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1)$$
$$y = \frac{3}{4}\cdot(x-1) + \frac{3}{2}$$
$$y = \frac{3}{4}\cdot x - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}$$
$$y = \frac{3}{4}\cdot x - \frac{3}{4} + \frac{6}{4}$$
$$y = \frac{3}{4}\cdot x + \frac{3}{4}$$

b. On a le tracé des deux droites suivantes :



Correction 4

1. La fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

$u(x) = x-1 \quad ; \quad v(x) = x^2+1$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2\cdot x$

La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{1\cdot(x^2+1) - (x-1)\cdot 2\cdot x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+1-2\cdot x^2+2\cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2\cdot x+1}{(x^2+1)^2}$$

2. a. Le nombre dérivée de la fonction f en 1 :

$$f'(1) = \frac{-1^2+2\times 1+1}{(1^2+1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

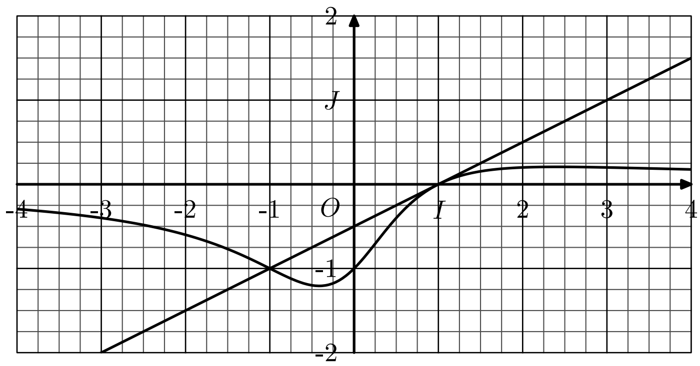
b. L'image du nombre 1 par la fonction f a pour valeur :

$$f(1) = \frac{1-1}{1^1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

D'après la formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe, on obtient l'équation réduite de la droite (d) :

$$y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1)$$
$$y = \frac{1}{2}\cdot(x-1) + 0$$
$$y = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2}$$

c. On a le tracé suivant :



3. a. On a le développement suivant :

$$(x-1)(a\cdot x^2+b\cdot x+c)$$
$$= a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x - a\cdot x^2 - b\cdot x - c$$
$$= a\cdot x^3 + (b-a)\cdot x^2 + (c-b)\cdot x - c$$

En identifiant les coefficients de ce polynômes à ceux de :

$x^3 - x^2 - x + 1$

On en déduit les égalités suivantes :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-a = -1 \\ c-b = -1 \\ -c = 1 \end{cases}$$

On en déduit les valeurs suivantes :
$a = 1 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = -1$

On a l'identité suivante :
$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1)$

b. On a la factorisation suivante :
$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1)$
$= (x-1)(x-1)(x+1) = (x+1)(x-1)^2$

c. Résolvons l'équation suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$
$$\frac{x-1}{x^2+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$
$$\frac{x-1}{x^2+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

En multipliant les deux membres de l'équation :

$$\frac{2{\cdot}x-2}{x^2+1} = x-1$$
$$\frac{2{\cdot}x-2}{x^2+1} - x + 1 = 0$$
$$\frac{2{\cdot}x-2+(-x+1)(x^2+1)}{x^2+1} = 0$$
$$\frac{2{\cdot}x-2-x^3-x+x^2+1}{x^2+1} = 0$$
$$\frac{-x^3+x^2+x-1}{x^2+1} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :

$$-x^3+x^2+x-1 = 0$$
$$x^3-x^2-x+1 = 0$$

D'après la question b. :

$$(x+1)(x-1)^2 = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x+1=0$	$x-1=0$
$x=-1$	$x=1$

4. Les abscisses des points d'intersection doivent vérifier l'équation :
$f(x) = \frac{1}{2}{\cdot}x - \frac{1}{2}$

D'après la question 3. c. , on en déduit que les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d) ont pour abscisse -1 et 1 :

- D'après la question 2. b. , $(1\,;0)$ sont les coordonnées d'un point d'intersection.
- Le point d'abscisse -1 de la droite (d) a pour ordonnée :
  $y = \frac{1}{2}{\cdot}x - \frac{1}{2}$
  $= \frac{1}{2}{\cdot}(-1) - \frac{1}{2}$
  $= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$
  $= -1$
  Ainsi, le second point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et (d) a pour coordonnées $(-1\,;-1)$.