Correction 1

a. On a les transformations suivantes :

$$e^x + e^{-x} = 0$$
$$e^x \cdot \left(1 + e^{-2x}\right) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses factuers est nul ; sachant que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, ceci entraîne :

$$1 + e^{-2x} = 0 \implies e^{-2x} = -1$$

Or, la fonction exponentielle étant strictement positive, cette dernière équation n'admet aucune solution :

$$\mathcal{S} = \varnothing$$

b. Cette égalité peut se transformer en :

$$e^{3x+1} = e^{-2x+3}$$
$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-2x+3}} = 1$$
$$e^{3x+1-(-2x+3)} = 1$$
$$e^{5x-2} = 1$$
$$e^{5x-2} = e^0$$

Des propriétés de la fonction exponentielle :

$$5x - 2 = 0$$
$$5x = 2$$
$$x = \frac{2}{5}$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c. On a :

$$e^{2x} - 1 = 0$$
$$e^{2x} = 1$$
$$e^{2x} = e^0$$

Des propriétés de la fonction exponentielle :

$$2x = 0$$
$$x = 0$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \{0\}$

d. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$x \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{2x} = 0$$
$$e^{2x} \cdot (x - 2) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. Sachant que la fonction exponentielle est strictement positive et ne s'annule pas, on en déduit l'équation :

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \{2\}$

Correction 2

a. On a :

$$e^x - e^{-x} > 0$$
$$e^x \cdot \left(1 - e^{-2x}\right) > 0$$

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$$1 - e^{-2x} > 0$$
$$1 > e^{-2x}$$
$$e^{-2x} < 1$$
$$e^{-2x} < e^0$$

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$$-2x < 0$$
$$x > 0$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^*$

b. On a les transformations algébriques suivantes :

$$x \cdot e^{-x} - 3 \cdot e^{-x} < 0$$
$$e^{-x} \cdot (x - 3) < 0$$

Etudions le signe du membre de gauche :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
e^{-x}		$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$e^{-x} \cdot (x-3)$		$-$	0	$+$	

On en déduit l'ensemble de solution : $\mathcal{S} =]-\infty ; 3[$

Correction 3

a.
- Etudions l'inéquation :

$$e^{2x} + 3 \cdot e^x < 4$$
$$e^{2x} + 3 \cdot e^x - 4 < 0$$
$$\left(e^x\right)^2 + 3 \cdot e^x - 4 < 0$$

- Etudions le polynôme $x^2 + 3x - 4$ qui a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-3 - 5}{2 \times 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-3 + 5}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

On en déduit la factorisation :

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

- On en déduit la factorisation :

$$e^{2x} + 3 \cdot e^x < 4$$
$$\left(e^x\right)^2 + 3 \cdot e^x - 4 < 0$$
$$\left(e^x + 4\right)\left(e^x - 1\right) < 0$$

- Résolvons les deux équations :
  - $e^x + 4 \geqslant 0 \Longrightarrow e^x \geqslant -4$
    On en déduit : $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
  - $e^x - 1 \geqslant 0 \Longrightarrow e^x \geqslant 1$
    On en déduit : $\mathcal{S} = [0 ; +\infty[$
- On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$e^x + 4$		$+$	|	$+$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$e^{2x} + 3e^x - 4$		$-$	0	$+$	

On en déduit les solutions de notre inéquation :

$$\mathcal{S} =]-\infty ; 0[$$

b. $$\begin{aligned} e^x + e^{-x} &< 2 \\ e^x - 2 + e^{-x} &< 0 \end{aligned}$$

La fonction exponentielle est strictement positif sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^x \cdot \left(e^x - 2 + e^{-x}\right) &< e^x \cdot 0 \\ e^{2x} - 2 \cdot e^x + e^{-x+x} &< e^x \cdot 0 \\ e^{2x} - 2 \cdot e^x + 1 &< 0 \\ \left(e^x\right)^2 - 2 \cdot e^x + 1 &< 0 \\ \left(e^x - 1\right)^2 &< 0 \end{aligned}$$

Or, le carré d'un nombre réel n'est jamais strictement négatif : $\mathcal{S} = \varnothing$

Correction 4

1. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x) = 3 \times \left(-2\right) \cdot e^{1-2x} = -6 \cdot e^{1-2x}$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f' étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Correction 5

1. la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x) = 3 \times 5 \cdot e^{5x+1} = 15 \cdot e5x + 1$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction g admet pour dérivée la fonction g' qui admet pour expression :
$g'(x) = 0 - 3 \times (-1) \cdot e^{-x} = 3 \cdot e^{-x}$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction 6

1. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x) = 1 - e^{-x}$

Résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ 1 - e^{-x} &> 0 \\ -e^{-x} &> -1 \\ e^{-x} &< 1 \\ e^{-x} &< e^0 \\ -x &< 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe de la fonction f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

On en déduit :

- Sur $\left]-\infty\,;0\right[$, la fonction f est strictement décroissante.
- Sur $\left]0\,;+\infty\right[$, la fonction f est strictement décroissante.

2. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$g'(x) = 6 + 3 \times (-2) \cdot e^{-2x} = 6 - 6 \cdot e^{-2x}$

Résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned} g'(x) &> 0 \\ -6 \cdot e^{-2x} &> -6 \\ e^{-2x} &< \frac{-6}{-6} \\ e^{-2x} &< 1 \\ e^{-2x} &< e^0 \\ -2x &< 0 \\ x &> \frac{0}{-2} \\ x &> 0 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe de la fonction g' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

On en déduit :

- Sur $\left]-\infty\,;0\right[$, la fonction g est strictement décroissante.
- Sur $\left]0\,;+\infty\right[$, la fonction g est strictement décroissante.

3. La fonction h admet pour dérivée la fonction h' dont l'expression est :

$h'(x) = 4 \cdot e^{4x-4} - 4 \cdot e$

Résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned} h'(x) &> 0 \\ 4 \cdot e^{4x-4} - 4 \cdot e &> 0 \\ 4 \cdot e^{4x-4} &> 4 \cdot e \\ e^{4x-4} &> e \\ e^{4x-4} &> e^1 \\ 4x - 4 &> 1 \\ 4x &> 1 + 4 \\ x &> \frac{5}{4} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe de la fonction h' :

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$

On en déduit :

- Sur $\left]-\infty\,;\frac{5}{4}\right[$, la fonction g est strictement décroissante.
- Sur $\left]\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$, la fonction g est strictement décroissante.

Correction 7

a. La fonction f est définie par le produit des fonctions u et v où :
$u(x) = 3 - x \quad ; \quad v(x) = e^x$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = e^x$

La formule de dérivation d'une produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=-1\cdot e^x+\big(3-x\big)\cdot e^x$$
$$=\big[-1+\big(3-x\big)\big]\cdot e^x=\big(2-x\big)\cdot e^x$$

b. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x+1 \quad ; \quad v(x)=e^x$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=e^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :
$$g'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=1\cdot e^x+\big(x+1\big)\cdot e^x$$
$$=\big(1+x+1\big)\cdot e^x=\big(x+2\big)\cdot e^x$$

Correction 8

1. La fonction f est définie par le produit des fonctions u et v où :
$u(x)=x+3 \quad ; \quad v(x)=e^{-x}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=-e^{-x}$

La formule de dérivation d'une produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction g :
$$g'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=1\cdot\big(-e^{-x}\big)+\big(x+3\big)\cdot e^{-x}=\big[-1+\big(x+3\big)\big]\cdot e^{-x}$$
$$=\big(x+2\big)\cdot e^{-x}$$

2. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x \quad ; \quad v(x)=e^{2\cdot x-1}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=2\cdot e^{2\cdot x-1}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=1\cdot e^{2\cdot x-1}+x\cdot\big(2\cdot e^{2\cdot x-1}\big)$$
$$=e^{2\cdot x-1}+2x\cdot e^{2\cdot x-1}=\big(2x+1\big)\cdot e^{2\cdot x-1}$$

Correction 9

1. La fonction h est définie par le produit des fonctions u et v où :
$u(x)=x \quad ; \quad v(x)=e^{x+1}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=e^{x+1}$

La formule de dérivation d'un produit l'expression de la fonction h' :
$$h'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=1\cdot e^{x+1}+x\cdot e^{x+1}$$
$$=(x+1)\cdot e^{x+1}$$

2. La fonction j est définie par le produit $u\cdot v$ où :
$u(x)=x^2+1 \quad ; \quad v(x)=e^{3x+1}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=2x \quad ; \quad v'(x)=3\cdot e^{3x+1}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction h :
$$j'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=2x\cdot e^{3x+1}+\big(x^2+1\big)\cdot 3\cdot e^{3x+1}$$
$$=\big(2x+3x^2+3\big)\cdot e^{3x+1}=\big(3x^2+2x+3\big)\cdot e^{3x+1}$$

Correction 10

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x+2 \quad ; \quad v(x)=e^{-x+1}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=-e^{-x+1}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=1\cdot e^{-x+1}+\big(x+2\big)\cdot\big(-e^{-x+1}\big)$$
$$=1\cdot e^{-x+1}+\big(-x-2\big)\cdot e^{-x+1}=\big(1+-x-2\big)\cdot e^{-x+1}$$
$$=\big(-x-1\big)\cdot e^{-x+1}=-\big(x+1\big)\cdot e^{-x+1}$$

2. La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de la fonction f' ne dépend que du signe de son facteur $-\big(x+1\big)$. Or, ce facteur admet pour tableau de signes sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-(x+1)$		$+$	0	$-$	

On en déduit le signe de la fonction f' sur $\big[-2\,;4\big]$:

x	-2		-1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

On a les images suivantes par la fonction f :
- $f(-2)=\big(-2+2\big)\cdot e^{-(-2)+1}=0\cdot e^{2+1}=0$
- $f(-1)=\big(-1+2\big)\cdot e^{-(-1)+1}=1\cdot e^{1+1}=e^2$
- $f(4)=\big(4+2\big)\cdot e^{-4+1}=6\cdot e^{-3}$

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations ci-dessous sur $\big[-2\,;4\big]$:

x	-2		-1		4
Variation de f	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$6\cdot e^{-3}$

Correction 11

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x^2-2\cdot x+1 \quad ; \quad v(x)=e^{-2\cdot x+6}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=2\cdot x-2 \quad ; \quad v'(x)=-2\cdot e^{-2\cdot x+6}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=\big(2\cdot x-2\big)\cdot e^{-2\cdot x+6}+\big(x^2-2\cdot x+1\big)\cdot\big(-2\cdot e^{-2\cdot x+6}\big)$$
$$=\big(2\cdot x-2\big)\cdot e^{-2\cdot x+6}+\big(-2\cdot x^2+4\cdot x-2\big)\cdot e^{-2\cdot x+6}$$
$$=\big[\big(2\cdot x-2\big)+\big(-2\cdot x^2+4\cdot x-2\big)\big]\cdot e^{-2\cdot x+6}$$
$$=\big(2\cdot x-2-2\cdot x^2+4\cdot x-2\big)\cdot e^{-2\cdot x+6}$$
$$=\big(-2\cdot x^2+6\cdot x-4\big)\cdot e^{-2\cdot x+6}$$

2. La fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit que le signe de la fonction f' ne dépend que du signe de son facteur $-2\cdot x^2+6\cdot x-4$. Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=6^2-4\times(-2)\times(-4)=36-32=4$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-6-2}{2\times(-2)} = \dfrac{-8}{-4} = 2$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \dfrac{-6+2}{2\times(-2)} = \dfrac{-4}{-4} = 1$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le signe de ce polynôme sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-2{\cdot}x^2+6{\cdot}x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, nous obtenons le signe de la fonction f' sur $[0{,}7\,;6]$:

x	0,7		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations *(sans les ordonnées)* de la fonction f :

x	0,7		1		2		6
Variation de f		↘		↗		↘	

Correction 12

1.
   - On a les deux limites :
     $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x+1 = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
     On en déduit la limite :
     $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} (x+1){\cdot}\mathrm{e}^x = +\infty$
   - On a le développement :
     $f(x) = (x+1){\cdot}\mathrm{e}^x = x{\cdot}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$
     On a les deux limites :
     $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x{\cdot}\mathrm{e}^x = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
     On en déduit la limite :
     $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty} x{\cdot}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 0$

2. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définie par :
   $u(x) = x+1 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x$
   qui admettent pour dérivées :
   $u(x)' = 1 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

   La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
   $f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 1\times\mathrm{e}^x + (x+1){\cdot}\mathrm{e}^x$
   $= (1+x+1){\cdot}\mathrm{e}^x = (x+2){\cdot}\mathrm{e}^x$

3. La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, le signe de f' ne dépend que du facteur $x+2$.

   On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   On a l'image suivante par la fonction f :
   $f(-2) = (-2+1){\cdot}\mathrm{e}^{-2} = -\mathrm{e}^{-2}$

La fonction f admet le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variation de f	0	↘	$-e^{-2}$	↗	$+\infty$

Correction 13

1. La fonction h est définie par le quotient des fonctions u et v où :
   $u(x) = 1-\mathrm{e}^{-2x} \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x$
   qui admettent pour dérivée :
   $u'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

   La formule de dérivation d'un quotient permet d'écrire l'expression de la fonction k' dérivée de la fonction h :
   $$h'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{\big(2\mathrm{e}^{-2x}\big){\cdot}\mathrm{e}^x - \big(1-\mathrm{e}^{-2x}\big){\cdot}\mathrm{e}^x}{\big(\mathrm{e}^x\big)^2}$$
   $$= \frac{2\mathrm{e}^{-2x+x} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-2x+x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}}$$
   $$= \frac{3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}$$

2. La fonction j est définie par le quotient des deux fonctions u et v définies par :
   $u(x) = 1-\mathrm{e}^{-2x} \quad ; \quad v(x) = 1+\mathrm{e}^{2x}$
   qui admettent pour dérivée :
   $u'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} \quad ; \quad v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$

   La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir :
   $$j'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
   $$= \frac{\big(2{\cdot}\mathrm{e}^{-2x}\big){\cdot}\big(1+\mathrm{e}^{2x}\big) - \big(1-\mathrm{e}^{-2x}\big){\cdot}\big(2{\cdot}\mathrm{e}^{2x}\big)}{\big(1+\mathrm{e}^{2x}\big)^2}$$
   $$= \frac{2{\cdot}\big(\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x-2x} - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x+2x}\big)}{\big(1+\mathrm{e}^{2x}\big)^2}$$
   $$= 2{\cdot}\frac{\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^0}{\big(1+\mathrm{e}^{2x}\big)^2} = 2{\cdot}\frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2}{\big(1+\mathrm{e}^{2x}\big)^2}$$

Correction 14

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
   $u(x) = \mathrm{e}^x \quad ; \quad v(x) = x$
   qui admettent pour dérivées :
   $u'(x) = \mathrm{e}^x \quad ; \quad v'(x) = 1$

   La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
   $$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{\mathrm{e}^x\times x + \mathrm{e}^x\times 1}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x\big(x-1\big)}{x^2}$$

2. (a.) On a le tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
Variation de f	$\parallel +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Correction 15

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
  $u(x) = x+1 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{2x}$
  qui admettent pour dérivées :
  $u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2\cdot\mathrm{e}^{2x}$

  La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\cdot\mathrm{e}^{2x} + (x+1)\cdot(2\cdot\mathrm{e}^{2x})$$
$$= \mathrm{e}^{2x} + (2x+2)\cdot\mathrm{e}^{2x} = \big[1+(2x+2)\big]\cdot\mathrm{e}^{2x}$$
$$= (2x+3)\cdot\mathrm{e}^{2x}$$

- L'expression de la fonction f' est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
  $u(x) = 2x+3 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{2x}$
  qui admettent pour dérivées :
  $u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = 2\cdot\mathrm{e}^{2x}$

  La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f'' dérivée de la fonction f' :

$$f''(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 2\cdot\mathrm{e}^{2x} + (2x+3)\cdot(2\cdot\mathrm{e}^{2x})$$
$$= 2\cdot\mathrm{e}^{2x} + (4x+6)\cdot\mathrm{e}^{2x} = \big[2+(4x+6)\big]\cdot\mathrm{e}^{2x}$$
$$= (4x+8)\cdot\mathrm{e}^{2x}$$

- Montrons que la fonction f vérifie cette relation :

$$f''(x) - 4\cdot f'(x) + 4\cdot f(x)$$
$$= (4x+8)\cdot\mathrm{e}^{2x} - 4\cdot\big[(2x+3)\cdot\mathrm{e}^{2x}\big] + 4\cdot\big[(x+1)\cdot\mathrm{e}^{2x}\big]$$
$$= \big[(4x+8) - 4\cdot(2x+3) + 4\cdot(x+1)\big]\cdot\mathrm{e}^{2x}$$
$$= (4x+8-8x-12+4x+4)\cdot\mathrm{e}^{2x} = 0\times\mathrm{e}^{2x} = 0$$

Correction 16

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
  $u(x) = -x-1 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{x}$
  qui ont pour dérivée :
  $u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^{x}$

  La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = -1\cdot\mathrm{e}^{x} + (-x-1)\cdot\mathrm{e}^{x}$$
$$= -\mathrm{e}^{x} + (-x-1)\cdot\mathrm{e}^{x} = \big[-1+(-x-1)\big]\cdot\mathrm{e}^{x}$$
$$= (-x-2)\cdot\mathrm{e}^{x}$$

- L'expression de la fonction f' est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
  $u(x) = -x-2 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{x}$
  qui admettent pour dérivée :
  $u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^{x}$

  La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f'' dérivée de la fonction f :

$$f''(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= -1\cdot\mathrm{e}^{x} + (-x-2)\cdot\mathrm{e}^{x}$$
$$= (-1-x-2)\cdot\mathrm{e}^{x} = (-x-3)\cdot\mathrm{e}^{x}$$

- Montrons que la fonction f vérifie la relation :

$$f''(x) - 3\cdot f'(x) + 2\cdot f(x)$$
$$= (-x-3)\cdot\mathrm{e}^{x} - 3\cdot\big[(-x-3)\cdot\mathrm{e}^{x}\big] + 2\cdot(-x-1)\cdot\mathrm{e}^{x}$$
$$= \big[(-x-3) - 3\cdot(-x-2) + 2\cdot(-x-1)\big]\cdot\mathrm{e}^{x}$$
$$= (-x-3+3x+6-2x-2)\cdot\mathrm{e}^{x} = 1\cdot\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}$$