$\boxed{\text{SOS Maths – Fonctions et Continuité}}$

(Corrigé)

Ex1 : Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

1) $f(x) = x^3\left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$.

Or $\lim\limits_{\pm\infty}(x^3) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{\pm\infty}\left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 2$

Par produit : $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$; de même : $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$.

2) $\lim\limits_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\pm\infty}(2x^2) = +\infty$. Donc, la courbe $\mathcal{C}_f$ ne possède aucune droite asymptote. (On dit que $\mathcal{C}_f$ possède une branche parabolique aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$).

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 6x^2 - 6x = (6x)(x-1)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (6x)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (6x)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > 1$.

4) Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur $[1;2]$.

* Sur $[1;2]$, f est continue (admis)
* Sur $[1;2]$, f est monotone (strict. croissante)
* Sur $[1;2]$, $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$.

Donc, il existe une unique solution $\alpha \in]1;2[$ / $f(\alpha) = 0$.

Avec une calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 1,678$ à 10^{-3} près.

Ex2 : Soit $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1) f est définie si $1 + x^3 \neq 0$ donc $x^3 \neq -1$, donc $x \neq -1$.

2) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty}\left(\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + x^2}\right) = \lim\limits_{-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

De même, on obtient : $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to -1^-} (1-x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} (1+x^3) = 0^-$
par quotient, on déduit que : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$.
De même, on obtient : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.

3) Puisque $\lim\limits_{-1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{-1^+} f(x) = +\infty$, on déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote verticale $(d) : x = -1$.
De même : $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote horizontale $(d') : y = 0$

4) f est dérivable sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$
et $f'(x) = \dfrac{(-1)(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \dfrac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2}$

Soit : $f'(x) = \dfrac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2}$

5) D'après l'étude effectuée en Ex 1, on obtient le tableau de variation de f ci-dessous :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

$\alpha \simeq 1,678$.
(cf. Ex 1)

6) L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est :
$(T_1) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f(1) = 0$ et $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$
Donc : $(T_1) : y = -\dfrac{1}{2}(x-1) + 0$ soit $(T_1) : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
De plus, sur $[1 ; +\infty[$ on a :

$$f''(x) = \frac{(6x^2-6x)(1+x^3)^2 - 2(3x^2)(1+x^3)(2x^3-3x^2-1)}{(1+x^3)^4}$$

$$= \frac{(6x^2-6x)(1+x^3) - (6x^2)(2x^3-3x^2-1)}{(1+x^3)^3}$$

$$= \frac{(-6x)(x^4-2x^3-2x+1)}{(1+x^3)^3}.$$

Ainsi, pour $x > -1$ on obtient $f''(x) > 0$ (cf tab de signes).
Donc, f est convexe sur $]-1;+\infty[$, soit $(\mathcal{C}_f)$ se situe au dessus de la tangente (T_1).

Ex3 : Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}$ pour $x \in]-\infty;-1[\cup [1;+\infty[$.

1) f est définie si $x \neq -1$ et $x^2-1 \geq 0$ donc $\mathcal{D}_f =]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{|x|\left(\sqrt{1-1/x^2} - 1/x^2\right)}{x(1+1/x)} = \pm \dfrac{\sqrt{1-1/x^2}-1/x^2}{1+1/x}$

Ainsi, $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{\pm\infty} (1+1/x) = 1$.
Par quotient, on déduit que : $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \pm 1$. $\left(\begin{smallmatrix} -1 \text{ en } -\infty \\ +1 \text{ en } +\infty \end{smallmatrix}\right)$

De plus, $\lim\limits_{x \to -1^-} \left(\sqrt{x^2-1}-1\right) = -1$ et $\lim\limits_{-1^-} (x+1) = 0^-$
par quotient, on obtient $\lim\limits_{-1^-} f(x) = +\infty$, de même : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$

3) Puisque $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = 1$, alors $\mathcal{C}_f$ admet la droite $(d) : y = 1$ comme asymptote horizontale et puisque $\lim\limits_{-1} f(x) = \pm\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $(d') : x = -1$ comme asymptote verticale

4) f est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$ et on obtient :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)(x+1) - \left(\sqrt{x^2-1}-1\right)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x+1) - (x^2-1) + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\,(x+1)^2} = \frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\,(x+1)^2}$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x+1+\sqrt{x^2-1} > 0$; on peut de plus travailler avec : $x+1+\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$

soit $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}\,(x+1)^2} = \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\cdot(x+1)^2}$

Donc, $\forall x \in \mathcal{D}_f : f'(x) > 0$.

5) On obtient le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	//		$+$	
f	1	↗	$+\infty$ ‖	//	$-\infty$	↗	1

6) On applique le TVI sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$

* Sur $[1 ; +\infty[$, f est continue (admis)
* Sur $[1 ; +\infty[$, f est monotone (strict. croissante)
* Sur $[1 ; +\infty[$, $f(1) \to -\infty$ et $f(+\infty) \to 1$.

Donc, $\exists ! \alpha \in [1 ; +\infty[$ / $f(\alpha) = 0$ avec $\alpha \simeq 1{,}414...$
(en fait $\alpha = \sqrt{2}$).

<u>Ex4</u> : Soit $f(x) = 3\sqrt{x^2+1} - 2x$. $(x \in \mathbb{R})$

1) $f(x) = 3|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2x = \pm x\left(3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2\right)$.
Or $\lim\limits_{\pm\infty}\left(3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2\right) = 1$ et $\lim\limits_{\pm\infty}(\pm x) = \pm\infty$.

Donc, on obtient $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

2) $\dfrac{f(x)}{x} = \begin{cases} -3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2 & \text{si } x \to -\infty \\ 3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2 & \text{si } x \to +\infty \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -5$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

Donc, $(\mathscr{C}_f)$ admet 2 asymptotes obliques : $\begin{cases} (d) : y = -5x \text{ en } -\infty \\ (d') : y = x \text{ en } +\infty \end{cases}$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = 3 \times \left(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) - 2 = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}} - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} = 3x \Leftrightarrow 4(x^2+1) = 9x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$
(La valeur $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$ est impossible car $\sqrt{x^2+1} > 0$)

4) tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$2/\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\sqrt{5}$	↗	$+\infty$