EXERCICE 3 7 points **Thèmes : suites**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

1. a. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

   b. Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1. def liste(k) :
2.     L = []
3.     u = ...
4.     for i in range(0, k+1) :
5.         L.append(u)
6.         u = ...
7.     return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
   Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer la valeur de sa limite.
5. a. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

   b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

EXERCICE 4 7 points **Thèmes : géométrie dans le plan et dans l'espace**

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A$(2\,;\,-1\,;\,0)$ B$(1\,;\,0\,;\,-3)$, C$(6\,;\,6\,;\,1)$ et E$(1\,;\,2\,;\,4)$;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.

   c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.
2. a. Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan ABC.

b. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan ABC et passant par le point E.

d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan ABC a pour coordonnées $\left(4\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$.

EXERCICE 3 7 points **Thèmes : suites, fonctions**

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 40 \\ u_{n+} & = & 0{,}008u_n\,(200-u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $f(x) = 0{,}008x(200-x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$ l'équation $f(x) = x$.
3. a. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ et dresser son tableau de variations.

   b. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 (7 points) **Thème : fonction exponentielle**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1** : Pour tout réel x : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
2. On considère la fonctiong définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.
   Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.
   Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en un seul point.
4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x\left(1-x^2\right)$.
   Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.
5. **Affirmation 5 :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x} = 0$.
6. **Affirmation 6 :** Pour tout réel x, $1+\mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^x$.