Correction 1

On a les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A) = (-2-2\,;1-3) = (-4\,;-2)$
- $\overrightarrow{DC}(x_C - x_D\,;y_C - y_D) = (-4-0\,;-3-(-1))$
 $=(-4\,;-2)$

De l'égalité des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$, on en déduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Ainsi, on a :

- l'égalité de longueurs : $AB=DC$
- le parallélisme des droites (AB) et (DC).

Si deux des côtés d'un quadrilatère sont parallèles et de même longueur alors $ABCD$ est un parallélogramme.

On en déduit que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Correction 2

La résolution de cet exercice s'effectue en deux étapes :

- ⇨ Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnée :
 $\left(\dfrac{x_A+x_C}{2}\,;\dfrac{y_A+y_C}{2}\right) = \left(\dfrac{(-4)+3}{2}\,;\dfrac{(-1)+(-2)}{2}\right)$
 $=\left(-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{3}{2}\right)$

 ⇨ Le milieu de $[BD]$ a pour coordonnée :
 $\left(\dfrac{x_B+x_D}{2}\,;\dfrac{y_B+y_D}{2}\right) = \left(\dfrac{(-3)+2}{2}\,;\dfrac{(-4)+1}{2}\right)$
 $=\left(-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{3}{2}\right)$

 Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
 Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
 $ABCD$ est un parallélogramme.

- Calculons maintenant les longueurs des diagonales :

 ⇨ $AC = \sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}$
 $= \sqrt{\left[3-(-4)\right]^2+\left[(-2)-(-1)\right]^2}$
 $= \sqrt{7^2+(-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

 ⇨ $BD = \sqrt{\left(x_D-x_B\right)^2+\left(y_D-y_B\right)^2}$
 $= \sqrt{\left[(-3)-2\right]^2+\left[(-4)-1\right]^2}$
 $= \sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

 On a : $AC=BD$
 Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.
 $ABCD$ est en fait un rectangle.

Correction 3

a. Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant orthogonaux, on en déduit :
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OC}$ étant colinéaires et de même sens, on en déduit :

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{AO}\|\times\|\overrightarrow{OC}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

c. Les vecteurs $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{CO}$ sont portés par les deux diagonales du carré $ABCD$: ces deux vecteurs sont orthogonaux. On en déduit : $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{CO}=0$

d. Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont portés par deux côtés adjacents du carré : ces deux vecteurs sont orthogonaux. On en déduit : $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

Correction 4

1. Dans le triangle BHC rectangle en H et d'après le théorème de Pythagore, on a la propriété :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= BH^2+HC^2\\
13^2 &= 12^2+HC^2\\
169 &= 144+HC^2\\
HC^2 &= 169-144\\
HC^2 &= 25\\
HC &= \sqrt{25}\\
HC &= 5
\end{aligned}$$

La relation de Chasles permet d'écrire les décompositions :

- $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}$
- $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC}$

Le produit scalaire peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC}\right)\\
&= \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}\\
&= 12^2+0+0+\left(-9\times5\right) = 144-45 = 99
\end{aligned}$$

2. Ce produit scalaire s'exprime aussi par :
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\widehat{ABC} = 15\times13\times\cos\widehat{ABC}$

De l'égalité de ces deux expressions du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}
99 &= 15\times13\times\cos\widehat{ABC}\\
\cos\widehat{ABC} &= \frac{99}{15\times13}\\
\widehat{ABC} &= \cos^{-1}\left(\frac{99}{15\times13}\right)\\
\widehat{ABC} &\approx 59{,}489\\
\widehat{ABC} &\approx 59{,}5
\end{aligned}$$

Correction 5

Dans un parallélogramme $ABCD$, on a :

- A l'aide de la relation de Chasles et de la double distributivié, le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$ a pour expression :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\
&= \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}^2\\
&= \overrightarrow{AB}^2+2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2
\end{aligned}$$

- A l'aide de la relation de Chasles et de la double distributivié, le produit scalaire $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD}$ a pour expression :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)\\
&= \overrightarrow{BC}^2+2\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}^2
\end{aligned}$$

Ainsi, la somme des carrés des longueurs des diagonales a pour expression :

$AC^2 + BD^2$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + 2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2$$
$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2\overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + +2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + 2\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$$
$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + 2\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \cdot\overrightarrow{CD}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + 2\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \cdot\overrightarrow{BA}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + 2\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{0}$$
$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2$$

Correction 6

Pour montrer que les deux droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires, nous allons étudier le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BI}$.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BI} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI}$$

En utilisant les angles droits du rectangle :

$$= 0 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} + 0$$

En utilisant la colinéarité des vecteurs mis en jeux dans ces produits scalaires :

$$= -AB\times CI + BC\times BC = -a\times\frac{a}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\right)^2$$
$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{2}{4}\cdot a^2 = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

Le produit scalaire est nul et aucun de ces deux vecteurs est nul ; les droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires.

Correction 7

Une video est accessible

Le calcul des coordonnées des vecteurs donnent :

$$\overrightarrow{DE}(-4\,;-5) \quad ; \quad \overrightarrow{DF}(-1\,;-1)$$

Ainsi, le produit scalaire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$ a pour valeur :

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = (-4)\times(-1) + (-5)\times(-1) = 9$$

La calcul des normes de vecteurs donne :

- $\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$
- $\|\overrightarrow{DF}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Le produit scalaire de deux vecteurs est également déterminé par la formule suivante :

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = DE\times DF\times\cos\widehat{EDF}$$
$$9 = \sqrt{41}\times\sqrt{2}\times\cos\widehat{EDF}$$
$$\cos\widehat{EDF} = \frac{9}{\sqrt{41}\times\sqrt{2}}$$

Les fonctions trigonométriques inverses permettent d'écrire :

$$\widehat{EDF} = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{41}\times\sqrt{2}}\right) \approx 6{,}34^o$$

au centième de degré près.

Un dessin à la main permet de montrer que l'angle $\widehat{FDE}$ est orienté positivement. Ainsi, on a :

$$\widehat{FDE} = 6{,}34^o$$

Correction 8

Une video est accessible

Les formules d'Al-Kashi appliquées au triangle ABC permettent d'écrire l'égalité :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$$
$$3^2 = 5^2 + BC^2 - 2\times 5\times BC\times\cos(30)$$
$$9 = 25 + BC^2 - 10\times BC\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$0 = BC^2 - 5\sqrt{3}\cdot BC + 16$$

En notant x la longueur du segment $[BC]$, on a l'égalité :

$$x^2 - 5\sqrt{3}\cdot x + 16 = 0$$

Etudions le polynôme du membre de gauche de l'équation qui est une équation du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(-5\sqrt{3}\right)^2 - 4\times1\times16 = 25\times3 - 64 = 75 - 64 = 11$$

Ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-5\sqrt{3})-\sqrt{11}}{2\times1} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-5\sqrt{3})+\sqrt{11}}{2\times1} = \frac{5\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}$$

On en déduit que deux triangles réalisent les conditions de l'énoncé avec :

- $BC = \dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2} \approx 2{,}67 \approx 2{,}7\,cm$
- $BC = \dfrac{5\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2} \approx 5{,}99 \approx 6{,}0\,cm$

Correction 9

Les formules d'Al-Kashi appliquées à ce triangle donne :

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\times AC\times BC\times\cos\widehat{ACB}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

Ainsi, on peut calculer la mesure des trois angles du triangle ABC :

- $$\cos\widehat{ACB} = \frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{-2\times AC\times BC}$$
  $$\cos\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{6{,}4^2 - 4{,}8^2 - 8^2}{-2\cdot\times4{,}8\times8}$$
  $$\widehat{ACB} = \cos^{-1}\left(\frac{6{,}4^2 - 4{,}8^2 - 8^2}{-2\cdot\times4{,}8\times8}\right)$$
  $$\widehat{ACB} \approx 53{,}1301 \approx 53{,}1^o$$
- $$\cos\widehat{ABC} = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{-2\times AB\times BC}$$
  $$\cos\widehat{ABC} = \frac{4{,}8^2 - 6{,}4^2 - 8^2}{-2\times6{,}4\times8}$$
  $$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{4{,}8^2 - 6{,}4^2 - 8^2}{-2\times6{,}4\times8}\right)$$
  $$\widehat{ABC} \approx 36{,}8698 \approx 36{,}9^o$$

- $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{-2\times AB\times AC}$

  $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{8^2 - 6{,}4^2 - 4{,}8^2}{-2\cdot\times 6{,}4\times 4{,}8}$

  $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{8^2 - 6{,}4^2 - 4{,}8^2}{-2\times 6{,}4\times 4{,}8}\right)$

  $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{0}{-2\times 6{,}4\times 4{,}8}\right)$

  $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(0\right)$

  $\widehat{BAC} = 90^o$

Correction 10

Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et d'abscisse 1. On peut noter les coordonnées $M(1\,;y)$ où $y\in\mathbb{R}$.

On a les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{MA}(x_A - x_M\,;y_A - y_M) = (-2-1\,;3-y)$
  $= (-3\,;3-y) = (-3\,;3-y)$
- $\overrightarrow{MB}(x_B - x_M\,;y_B - y_M) = (3-1\,;0-y) = (2\,;-y)$

Le point M étant un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, on a la relation :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$$
$$-3\times 2 + \big(3-y\big)\big(-y\big) = 0$$
$$-6 - 3\cdot y + y^2 = 0$$
$$y^2 - 3\cdot y - 6 = 0$$

Le membre de gauche de cette équation est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \big(-3\big)^2 - 4\times 1\times(-6) = 9+24 = 33$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-3)-\sqrt{33}}{2\times 1} = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-3)+\sqrt{33}}{2\times 1} = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$$

Les deux points ayant pour abscisse 1 et appartenant au cercle $\mathscr{C}$ ont pour coordonnées :

$$M_1\left(1\,;\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right) \quad ; \quad M_2\left(1\,;\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)$$