EXERCICE 3 7 points **Thèmes : suites**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1. **a.** $u_1 = u_{n+1} = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{3}$ et $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{1}{4}$.

   b. On complète les lignes 3 et 6 du script python ci-dessous pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1.  def liste(k) :
2.      L = []
3.      u = 1
4.      for i in range(0, k+1) :
5.          L.append(u)
6.          u = u/(1+u)
7.      return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$ car u_n est strictement positif.

   La suite (u_n) est donc décroissante.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ positive ou nulle.

4. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, on a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.

   La fonction f est continue, car dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

   On résout l'équation : $\dfrac{\ell}{1+\ell} = \ell \iff \ell = \ell(1+\ell) \iff 0 = \ell^2 \iff \ell = 0$.

   Donc la suite (u_n) a pour limite 0.

5. **a.** Au vu des premiers termes, on peut conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

   b. On démontre par récurrence la conjecture précédente. Soit P_n la propriété : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   - Initialisation :

   pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$ donc P_0 est vraie.

   - Hérédité :

   Supposons que P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   On a alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \dfrac{1}{1+(n+1)}$: la relation est vraie au rang $(n+1)$.

   P_{n+1} est donc vraie.

   Comme P_0 est vraie, et que pour $n \in \mathbb{N}$, P_n vraie entraîne P_{n+1} vraie, d'après le principe de récurrence on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

EXERCICE 4 7 points **Thèmes : géométrie dans le plan et dans l'espace**

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A(2 ; −1 ; 0) B(1 ; 0 ; −3), C(6 ; 6 ; 1) et E(1 ; 2 ; 4) ;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. **a.** On veut démontrer que le triangle ABC est rectangle en A ; on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4+7-3 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

   b. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 5-6+12 = 11$.

   $BA = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11}$ et $BC = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \sqrt{77}$

   c. On cherche la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

   On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right) &\iff 11 = \sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)\\ &\iff 11 = \sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{7}\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)\\ &\iff \cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

   La calculatrice donne $\widehat{ABC} \approx 68°$ au degré près.

2. **a.** On veut démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

   Un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.

   De plus $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times(-1) - 1\times 1 - 1\times(-3) = -2-1+3 = 0$

et
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times4-1\times7-1\times1 = 8-7-1=0$

$\vec{n}$ est donc un vecteur normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$.

Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

b. On déduit une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x-y-z+d=0$, comme A appartient à ce plan, on a : $5+d=0$ soit $d=-5$.

Une équation de (ABC) est donc $2x-y-z-5=0$.

c. On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est donc le vecteur $\vec{n}$

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D}\iff\overrightarrow{EM}=t\,\vec{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1&=&2t\\ y-2&=&-t,\quad t\in\mathbb{R}\\ z-4&=&-t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&1+2t\\ y&=&2-t,\quad t\in\mathbb{R}.\\ z&=&4-t\end{array}\right.$$

d. On démontre que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

H correspond à l'intersection du plan (ABC) avec la droite perpendiculaire à (ABC) qui passe par E soit la droite $\mathscr{D}$, les coordonnées de H seront donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x=1+2t\\ y=2-t\\ z=4-t\\ 2x-y-z-5=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=1+2t\\ y=2-t\\ z=4-t\\ 2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1+2t\\ y=2-t\\ z=4-t\\ 6t-9=0\end{cases} \iff \begin{cases} t=\frac{3}{2}\\ x=4\\ y=\frac{1}{2}\\ z=\frac{5}{2}\end{cases}$$

Exercice 3 :

1. L'année 2022 est l'année 2021 + 1, donc on doit calculer u_1.

$u_1 = 0{,}008u_0(200-u_0) = 0{,}008\times40\times160 = 51{,}2$.

L'estimation est donc de 51,2 oiseaux (arrondie à 51 animaux).

2. Résolvons $f(x)=x$.

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff 0{,}008x(200-x)=x\\ &\iff 1{,}6x-0{,}008x^2=x\\ &\iff 0{,}008x^2-0{,}6x=0\\ &\iff x(0{,}008x-0{,}6)=0\\ &\iff x=0 \quad\text{ou}\quad 0{,}008x-0{,}6=0\\ &\iff x=0 \quad\text{ou}\quad x=\frac{0{,}6}{0{,}008}=75\end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions dans $[0\,;\,100]$: 0 et 75.

3. **a.** Pour tout x entre 0 et 100, on a : $f(x)=-0{,}008x^2+1{,}6x$. C'est une fonction polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif ($-0{,}008$).

Le sommet de la parabole représentant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ a pour abscisse : $\dfrac{-1{,}6}{2\times(-0{,}008)}=100$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ serait donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,100]$ et décroissante sur $[100\,;\,+\infty[$, donc f, qui est définie sur $[0\,;\,100]$ est bien strictement croissante sur $[0\,;\,100]$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose P_n la propriété : « $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 100$ ».

- Initialisation : On a $u_0=40$ et $u_1=51{,}2$, donc on a bien $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 100$ donc la propriété P_0 est vraie.
- Hérédité : Soit n un entier naturel . On suppose P_n vraie.

$$\begin{aligned} P_n &\implies 0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 100\\ &\implies f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(100) \qquad f \text{ est croissante sur } [0\,;\,100]\\ &\implies 0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 80 \qquad \text{car } f(0)=0;\ f(100)=80\\ &\implies 0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 100\\ &\implies P_{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire.
- Conclusion : La propriété P_0 est vraie, et pour un naturel n quelconque, si P_n est vraie, P_{n+1} l'est aussi donc, d'après l'axiome du raisonnement par récurrence :

$\forall n\in\mathbb{N};\quad 0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 100$

On en déduit donc que la suite est bornée par 0 et 100, et qu'elle est croissante.

c. La suite est croissante et majorée par 100, donc elle converge vers une limite ℓ, qui est supérieure à $u_0=40$ et inférieure au majorant 100.

d. Puisque la suite est convergente et définie par récurrence et que la fonction de récurrence f est continue sur $[0\,;\,100]$, intervalle contenant la limite ℓ, d'après le théorème du point fixe, ℓ est une solution de l'équation $f(x)=x$.

Comme on a établi que cette équation n'a que deux solutions dans [0 ; 100], 0 et 75, et que l'on a établi que ℓ est comprise entre 40 et 100, il vient que $\ell = 75$.

La suite converge donc vers 75.

Exercice 3 (7 points) **Thèmes : fonction exponentielle**

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)} = \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Affirmation 1 : Vraie

2. $g(x) = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{1}{2} \iff 2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + 1 \iff \mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$ **Affirmation 2 : Vraie**

3. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + x^2 \times -\mathrm{e}^{-x} = \left(2x - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   L'équation d'une tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Pour que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathscr{C}$, il faut que la courbe $\mathscr{C}$ admette une tangente d'équation $y = 0$ (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$. Sachant que $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-a} \neq 0$,

   $f(a) = 0 \iff a^2\mathrm{e}^{-a} = 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0$.

   $f'(a) = 0 \iff (2a - a^2)\mathrm{e}^{-a} = 0 \iff 2a - a^2 = 0 \iff a(2-a) = 0 \iff a = 0$ ou $a = 2$.

   Donc $a = 0$. Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}$.

   Affirmation 3 : Vraie

4. La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \mathrm{e}^x \times \left(1 - x^2\right) + \mathrm{e}^x \times -2x = \mathrm{e}^x\left(1 - x^2 - 2x\right) = \left(-x^2 - 2x + 1\right)\ \mathrm{e}^x$.

   La fonction h' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \times \left(-x^2 - 2x + 1\right) = \mathrm{e}^x\left(-2x - 2 - x^2 - 2x + 1\right) = \left(-x^2 - 4x - 1\right)\mathrm{e}^x$

   Si $\mathscr{C}_h$ admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe. Or $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x, donc étudions le signe de $-x^2 - 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

   $-x^2 - 4x - 1$ s'annule pour $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et pour $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ car $\Delta = 12$.

   Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

   Affirmation 4 : Fausse

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}$.

   D'après les croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x) = 1$

   Affirmation 5 : Fausse

6. $1 + \mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^x \iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 \geqslant 0 \iff (\mathrm{e}^x - 1)^2 \geqslant 0$.

   Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x. **Affirmation 6 : Vraie**