SOS Maths Tale — Préparation BAC – LN - *Corrigé* — Mars 2023

Correction

1. Par lecture graphique : $f(1)=4$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale donc $f'(1)=0$.

2. la fonction f est un quotient de deux fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction f est donc dérivable sur cet intervalle :

$$f'(x)=\frac{\frac{b}{x}\times x-1(a+b\ln x)}{x^2}=\frac{b-a-b\ln x}{x^2}$$

3. On a $f(1)=a$ et $f'(1)=\dfrac{b-a-b\ln 1}{1^2}=b-a$. Les lectures graphiques de la question 1 donnent $f(1)=a=4$ et $f'(1)=b-a=b-4=0$. Donc $b=4$.

4.
- On a $\lim\limits_{x\to 0^+}(4+4\ln x)=-\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.
- On a pour $x\in]0\ ;\ +\infty[$: $f(x)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{4\ln x}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\ln x}{x}=0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

5. D'après la question 2. Pour $x\in]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x)=\dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-\ln x$.
- Si $x\in]0\ ;\ 1]$, $\ln x\leq 0$, donc $f'(x)\geq 0$.
- Si $x\in]1\ ;\ +\infty[$, $\ln x>0$, donc $f'(x)<0$.

On obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

6. f' est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. f' est donc dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f''(x)=\frac{-4\times\frac{1}{x}\times x^2-2x\times(-4\ln x)}{x^4}=\frac{-4x+8x\ln x}{x^4}=\frac{-4+8\ln x}{x^3}$$

7. La courbe représentative de f admet un point d'inflexion en $I(a;f(a))$ si et seulement si sa dérivée seconde s'annule en a en changeant de signe.

$$f''(x)=0\iff -4+8\ln x=0\iff -1+2\ln x=0\iff \ln x=\frac{1}{2}\iff x=e^{\frac{1}{2}}$$

Le signe de f'' sur $]0,+\infty[$ ne dépend que de celui de $-4+8\ln x$.
- On a $-4+8\ln x<0\iff \ln x>\frac{1}{2}\iff x>e^{\frac{1}{2}}$,
- Et $-4+8\ln x\geq 0\iff \ln x\leq\frac{1}{2}\iff x\leq e^{\frac{1}{2}}$

Ainsi f'' s'annule en changeant de signe en $a=e^{\frac{1}{2}}$.

L'ordonnée de ce point I est $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{4+4\times\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{6}{e^{\frac{1}{2}}}=6e^{-\frac{1}{2}}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion $I(e^{\frac{1}{2}},6e^{-\frac{1}{2}})$.

SOS Maths Tale — Préparation BAC - EXP — Mars 2023

Correction

Partie A

1. $f(x)=xe^{-2x}$ donc $f'(x)=e^{-2x}+x\times(-2)e^{-2x}=(1-2x)e^{-2x}$ et donc
$f''(x)=-2e^{-2x}+(1-2x)\times(-2)e^{-2x}=(-2-2+4x)e^{-2x}=4(x-1)e^{-2x}$
Réponse b.
2. Si $x\in[0\ ,\ 2]$, $f'(x)\leq 0$, donc la fonction f est **décroissant** sur $[0\ ,\ 2]$.
Si $x\in[2\ ,\ 5]$, $f'(x)\geq 0$, donc la fonction f est **croissante** sur $[2\ ,\ 5]$.
et si $x\in[5\ ,\ 7]$, $f'(x)\leq$, donc f est **décroissante** sur $[5\ ,\ 7]$.
Réponse b.
3. La fonction f est croissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$ donc f' est positive sur $]-\infty\ ;\ -1]$.
Réponse b.

Partie B

Affirmation 1 : Une équation de la tangente t au point A d'abscisse x_0 à la courbe représentative de la fonction f est donnée par : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

On a $x_0=1$, donc $f(x_0)=f(0)=-2+3e^0=-2+3=1$ et f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ on a $f'(x)=-e^x+(3-x)e^x=(2-x)e^x$, d'où $f'(x_0)=f'(0)=2e^0=2$. Donc une équation de t est : $y-1=2(x-0)$ d'où $y=2x+1$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 2 : On a quel que soit le réel x : $e^{2x}-e^x+\dfrac{3}{x}=e^x\left(e^x-1+\dfrac{3}{xe^x}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{xe^x}=0$, d'où par sommes des limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-1+\dfrac{3}{xe^x}\right)=+\infty$ et par produit de limites :

$$\lim_{x\to+\infty}e^x\left(e^x-1+\frac{3}{xe^x}\right)=+\infty$$

L'affirmation est fausse.

Affirmation 3 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-x+\mathrm{e}^{-x}$

f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x)=-1-\mathrm{e}^{-x}=-(1+\mathrm{e}^{-x})<0$ car quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$, donc $1+\mathrm{e}^{-x}>1$ puis $-(1+\mathrm{e}^{-x})<-1<0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

De même $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)=0$.

Comme $f(0)=1+1=2>0$ et $f(2)=1-2+\mathrm{e}^{-2}\approx-0,86<0$, on a bien $0<x_0<2$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 4 : On a $g'(x)=2x-5+\mathrm{e}^{x}$ et $g''(x)=2+\mathrm{e}^{x}$. On sait pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x}>0$ on a alors $g''(x)=2+\mathrm{e}^{x}>2>0$. La fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est vraie.

SOS Maths Tale — Préparation BAC - EXP — Mars 2023

Correction

Partie I

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x-\mathrm{e}^{-2x}$
   - On a $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-\mathrm{e}^{-2x}=-\infty$; donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.
   - On a $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x}=0$; donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
2. la fonction f est somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $x\mapsto x$ et $x\mapsto-\mathrm{e}^{-2x}$, donc f est dérivable sur cet intervalle : $f'(x)=1-(-2)\mathrm{e}^{-2x}=1+2\mathrm{e}^{-2x}$.
   Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-2x}>0$, on alors $1+2\mathrm{e}^{-2x}>1>0$. La dérivée f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction f est continue car et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; et comme $0\in\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha)=0$.
   $f(0)=-1$ et $f(1)\approx0,865$, donc $0<\alpha<1$;
   Avec la calculatrice on obtient

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
f(x)	-1	-0,718730753	-0,470320046	-0,248811636	-0,049328964	0,132120559

$f(0,4)\approx-0,05$ et $f(0,5)\approx0,13$, donc $0,4<\alpha<0,5$;

x	0,4	0,41	0,42	0,43
f(x)	-0,049328964	-0,030431655	-0,011710523	0,006837918

$f(0,42)\approx-0,01$ et $f(0,43)\approx0,007$, donc $0,42<\alpha<0,43$.

4. On a donc :
   - sur $]-\infty\,;\,\alpha[$, $f(x)<0$;
   - sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x)>0$;
   - et $f(\alpha)=0$.

Partie II

1.
$$h(t)=\sqrt{t^2+\mathrm{e}^{-2t}}$$

   a. Posons $u(t)=t^2+\mathrm{e}^{-2t}$, donc $h(t)=\sqrt{u(t)}$. La fonction h est dérivable car composée de deux fonctions dérivables : $t\mapsto\sqrt{t}$ et $t\mapsto t^2+\mathrm{e}^{-2t}$.
   Donc $h'(t)=\dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}=\dfrac{2t-2\mathrm{e}^{-2t}}{2\sqrt{t^2+\mathrm{e}^{-2t}}}=\dfrac{t-\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{t^2+\mathrm{e}^{-2t}}}=\dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2+\mathrm{e}^{-2t}}}$.

SOS Maths Tale — Préparation BAC - LN — Mars 2023

Correction

1. Pour $x\in]0,+\infty[$, $f(x)=x\left(1-4\dfrac{\ln(x)}{x}\right)+4-\dfrac{3}{x}$. D'après le cours $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-4\frac{\ln(x)}{x}\right)+4-\frac{3}{x}\right)=+\infty$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$

$$f'(x)=1+0-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{x^2-4x+3}{x^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{x^2}$$

3. a. Comme le dénominateur de $f'(x)$ est $x^2>0$ pour tout $x\in]0,+\infty[$, le signe de de $f'(x)$ est celui de son numérateur $(x-1)(x-3)$. On a donc $f'(x)\leq0$ pour $x\in[1,3]$ et $f'(x)>0$ pour $x\in]0\,;1[\cap]3;\,+\infty[$.
   On dresse le tableau des variations de f

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6-4\ln(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

   Avec $f(1)=2$, $f(3)=6-\ln(3)\approx1,61$ et $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$:

b. • Comme $\frac{5}{3} \in]-\infty\,;\,2]$, l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$ admet donc une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

- $\frac{5}{3} \approx 1{,}67$ et $f(3) = 6 - 4\ln 3 \approx 1{,}61$ donc $\frac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\,2]$, donc l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\,3[$.
- $\frac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\,+\infty[$, donc $f(x) = \frac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

L'équation $f(x) = \frac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\,;\,+\infty[$.

4. La convexité de la fonction f est déterminée par le signe sa dérivée seconde f'',

$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ donc

$f''(x) = \frac{(2x-4)\times x^2 - (x^2 - 4x + 3)\times 2x}{x^4} = \frac{(2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 6)\times x}{x^4} = \frac{4x - 6}{x^3}$

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ la dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \frac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

SOS Maths Tale — Préparation BAC - QCM — Mars 2023

Correction

1. On considère la fonction $g \longmapsto \ln\left(x^2 + x + 1\right)$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$.
La fonction $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ est strictement positive et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ (fonction polynomiale,somme de termes strictement positifs), donc la fonction composée $g:\ x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. On a alors :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}$$

Réponse d

2. la fonction $g:\ x \mapsto x\ln(x) - x$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et on a

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = f(x)$$

La fonction g est donc une primitive de f.

Réponse c

3. On factorise par les termes "dominants" du quotient a_n. On a donc pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1 - 3^n}{1 + 2^n} = \frac{3^n\left(\frac{1}{3^n} - 1\right)}{2^n\left(\frac{1}{2^n} + 1\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}$$

Par somme et quotient de limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1} = -1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$; De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\frac{3}{2} > 1$, donc par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n) = -\infty$.

Réponse a.

4. La fonction dérivé f' est décroissante sur $[-2\,;\,0]$, Donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

Réponse d

5. $f'(x)$ s'annule en $x = 1$ en changeant de signe et en passant du positif au négatif, la fonction f va donc admettre un maximum en $x = 1$.

Réponse c

6. La valeur v de l'action augmente donc la boucle while s'exécute tant que $v < 200$ en ajoutant 1 à la valeur m du mois à chaque exécution.

Réponse a.

SOS Maths Tale — Préparation BAC - QCM — Mars 2023

Correction

1. On considère la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x\,ln(x)x + 1$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout x réel strictement positif, on a :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Réponse a.

2. On a $g(x) = x^2 - x^2\ln(x)$.
$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et d'après le cours $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$ (croissances comparées).
Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Réponse c.

3. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\left(x^2 - 0,9x - 0,1\right)$.
On a donc $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$
$x_0 = 0$ est donc une solution et pour l'équation du second degré $\Delta = 0,121 = 0,11^2 > 0$, elle admet donc deux solutions : $x_1 = -0,1$ et$x_2 = 1$.
L'équation $f(x) = 0$ a donc trois solutions : $-0,1$; 0 et 1.

Réponse d.

4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = \dfrac{1}{2}H(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables.
Et comme H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$ on alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ K'(x) = \frac{1}{2} \times 2H'(2x) = H'(2x) = h(2x)$$

Donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ K'(x) = k(x)$$

On en déduit donc que K est une primitive de k sur $\mathbb{R}$.

Réponse c.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables sur cet ensemble.
$\forall x \in \mathbb{R},\quad 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$.
On a donc $f'(1) = (1+1)\mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e}$ et $f(1) = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est donc :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2\mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e} = 2\mathrm{e}x + 2\mathrm{e} - \mathrm{e} = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}$$

Réponse b.

$$\begin{aligned}(0,2)^n < 0,001 &\iff \ln\left(0,2^n\right) < \ln(0,001)\\ &\iff n\ln(0,02) < \ln(0,001)\\ &\iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \qquad \text{car } \ln(0,2) < 0\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \approx 4,3$, donc les solutions de cette inéquation sont les entiers naturels n tels que $n \geqslant 5$.

6. Réponse d.