**SOS Maths 1ère** **Prépa Devoir commun - *Corrigé*** **09/03/2023**

## Exercice 1

**Monotonie** **(3 points)**

1) $u_0 = 3, \quad u_4 = \dfrac{11}{5} = 2,2, \quad u_{99} = \dfrac{201}{100} = 2,01.$

Conjecture : $u_n$ tend vers 2 lorsque $n$ devient très grand.

2) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+5}{n+2} - \dfrac{2n+3}{n+1} = \dfrac{(2n+5)(n+1)-(2n+3)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$

$= \dfrac{2n^2+2n+5n+5-2n^2-4n-3n-6}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{-1}{(n+2)(n+1)}.$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1) > 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n < 0.$ La suite $(u_n)$ est décroissante.

3) On obtient le programme suivant :

```
def seuil(a):
    n=0
    while (2*n+3)/(n+1)>a:
        n=n+1
    return n
```

## Exercice 2

**Divers** **(6 points)**

1) $S = 220 + 224 + 228 + \cdots + 1\,000.$

$S$ est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 4 et de 1er terme 220.

Nombre de termes : $\dfrac{1000-220}{4} + 1 = 196$

$S = \text{Nbre de termes} \times \dfrac{\sum \text{termes extrèmes}}{2} = 196 \times \dfrac{220+1000}{2} = 119\,560.$

2) a) $u_2 = q \times u_1 \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5\,304,5}{5\,150} = 1,03$

$u_1 = q \times u_0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = \dfrac{u_1}{q} = \dfrac{5\,150}{1,03} = 5\,000.$

b) $S_{18} = 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \dfrac{1-q^{\text{Nbre de termes}}}{1-q} = 5\,000 \times \dfrac{1-1,03^{19}}{-0,03} = \dfrac{500\,000(1,03^{19}-1)}{3}$

$\approx 125\,584,34$ au centième près.

3) a) Soit deux contre-exemples montrant que $(u_n)$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

$u_1 = 1,05 \times 300 + 15 = 330 \quad \text{et} \quad u_2 = 1,05 \times 330 + 15 = 361,5$

- $u_1 - u_0 = 30$ et $u_2 - u_1 = 31,5$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ non arithmétique.
- $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{330}{300} = \dfrac{11}{10}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{361,5}{330} = \dfrac{241}{220}$ donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ non géométrique.

b) $v_{n+1} = u_{n+1} + 300 = 1,05u_n + 15 + 300 = 1,05u_n + 315 = 1,05\left(u_n - \dfrac{315}{1,05}\right)$

$= 1,05(u_n + 300) = 1,05v_n.$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1,05,$ la suite $v_n)$ est géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $v_0 = 300 + 300 = 600.$

c) $v_n = v_0 \times q^n = 600 \times 1,05^n$ d'où $u_n = v_n - 300 = 600 \times 1,05^n - 300.$

## Exercice 3

**Équation de la tangente** **(2 points)**

1) $f'(x) = \dfrac{2(x-3)-1(2x+1)}{(x-3)^2} = \dfrac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \dfrac{-7}{(x-3)^2}$

2) $T_2 : \ y = f'(2)(x-2) + f(2)$ or $f'(2) = -7$ et $f(2) = -5$ donc

$T_2 : \ y = -7(x-2) - 5 \ \Leftrightarrow \ y = -7x + 9$

## Exercice 3

**Variations de fonctions** **(5 points)**

1) a) $f'(x) = 4e^{-x} + (4x-1)(-1)\,e^{-x} = e^{-x}\,(4-4x+1) = e^{-x}\,(-4x+5)$

b)
- $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ -4x+5 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \dfrac{5}{4}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} \neq 0.$
- Signe $f'(x)$ = signe de $(-4x+5)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} > 0.$

| $x$ | $0$ | | $\frac{5}{4}$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $4e^{-\frac{5}{4}}$ | $\searrow$ | $19e^{-5}$ |

2) a) $g'(x) = (2x-5)\,e^x + (x^2-5x+7)\,e^x = e^x\,(2x-5+x^2-5x+7) = e^x(x^2-3x+2).$

b)
- $g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 3x + 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_1 = 1$ racine évidente ou $x_2 = 2.$

car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \neq 0.$

- Signe de $g'(x)$ = signe de $(x^2 - 3x + 2)$ car $\forall x \in \mathbb{R},\quad e^x > 0$.

| $x$ | $-5$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $57e^{-5}$ | $\nearrow$ | $3e$ | $\searrow$ | $e^2$ | $\nearrow$ | $e^3$ |

## Exercice 1

**Etude d'une fonction** **(5 points)**

1) $A(0\ f(0)) = \left(0\ ;\ \dfrac{e^0}{0+1}\right) = (0\ ;\ 1)$ intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

2) $f(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{e^x}{x+1} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^x = 0$ impossible.
La courbe $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

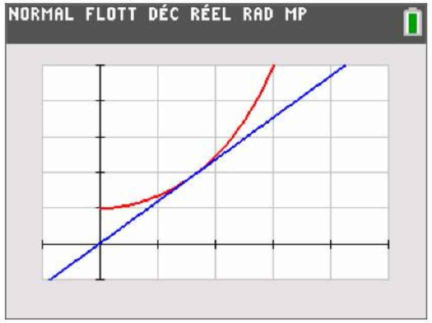
3) $f$ est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$.
$f'(x) = \dfrac{e^x(x+1) - 1e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$.

4) $f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad xe^x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R},\quad e^x > 0$.
Le signe de $f'(x)$ est du signe de $x$.

Pour connaître la limite en $+\infty$.
On teste avec la calculatrice en rentrant :
$Y_1 = e^x/(x+1),\ \ Y_1(100) \approx 2,66 \times 10^{41}$
La fonction $f$ tend vers $+\infty$.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5) La tangente (T) passe par l'origine si $y(0) = 0$.
(T) : $y = f'(1,6)(x - 1,6) + f(1,6) \quad\Rightarrow\quad y(0) = f'(1,6) \times 1,6 + f(1,6)$
or $f(1,6) = \dfrac{e^{1,6}}{2,6}$ et $f'(1,6)) = \dfrac{1,6\,e^{1,6}}{2,6^2}$ donc
$y(0) = -\dfrac{1,6^2 e^{1,6}}{2,6^2} + \dfrac{e^{1,6}}{2,6} = \dfrac{e^{1,6}(-2,56 + 2,6)}{2,6^2} \quad\Leftrightarrow\quad y(0) = \dfrac{0,04e^{1.6}}{2.6^2} \neq 0 \quad (\approx 0,03)$.
La tangente (T) ne passe pas par l'origine du repère.




## Exercice 4

**Étude d'une fonction par une fonction auxiliaire** **(5 points)**

Soit $g$ la fonction définie sur $[-5\ ;\ 5]$ par : $g(x) = e^x - x + 1$.

1) $g'(x) = e^x - 1$.

2) $g'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^x = 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^x = e^0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0$.
Comme la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, si $x > 0$ alors $g'(x) > 0$ sinon $g'(x) < 0$.

$g(-5) = e^{-5} + 5 + 1 = e^{-5} + 6 \approx 6,0$
$g(0) = e^0 - 0 + 1 = 2$
$g(5) = e^5 - 5 + 1 = e^5 - 4 \approx 144,4$

| $x$ | $-5$ | | $0$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $g(-5)$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $g(5)$ |

3) D'après le tableau de variation : $\forall x \in [-5\ ;\ 5],\quad g(x) \geqslant 2 > 0$.

4) a) $f'(x) = 1 + \dfrac{1e^x - x\,e^x}{(e^x)^2} = 1 + \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = 1 + \dfrac{1-x}{e^x} = \dfrac{e^x - x + 1}{e^x} = \dfrac{1}{e^x} \times g(x)$.
$\forall x \in [-5; 5],\quad e^x > 0$ et $g(x) > 0 \quad\Rightarrow\quad f'(x) > 0$.
La fonction $f$ est croissante sur $[-5; 5]$.

b) $T_0$ : $y = f'(0)\,x + f(0)$ or $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{1}{e^0} \times g(0) = 2$ donc :
$T_0$ : $y = 2x + 1$