∽ Baccalauréat Métropole 12 mai 2022 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thème : probabilités**

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

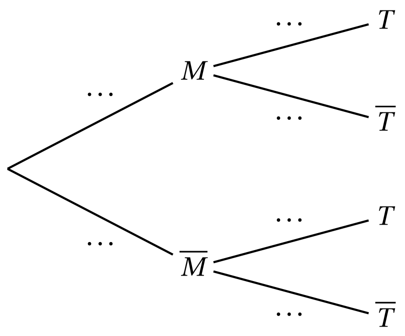
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

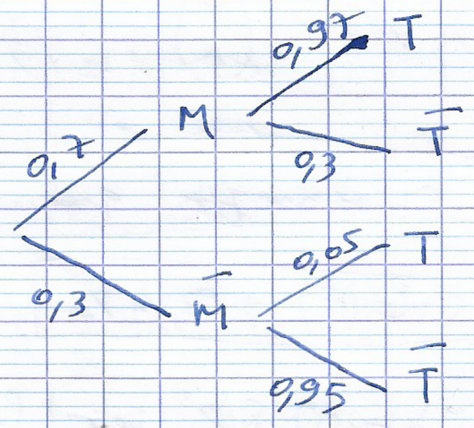
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



1- D'après l'énoncé on a :

$$P(M) = 0,7 \ ; \quad P_M(T) = 0,97 \text{ et } P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,95$$

On complète ces résultats sur l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

2- On cherche $P(M \cap T)$:

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,7 \times 0,97 = 0,679$$

3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.

3- On applique la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$$
$$= P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)$$
$$0,679 + 0,3 \times 0,05 = 0,694$$

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

4- On cherche $P_T(M)$, on applique la formule des probabilités conditionnelles

$$P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)} = \frac{0,679}{0,694} \simeq 0,978.$$

5. **a.** Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.

5. a) D'après la formule des probabilités conditionnelles on a

$$P_{\bar T}(\bar M) = \frac{P(\bar M\cap \bar T)}{P(\bar T)} = \frac{0,285}{1-0,694} \simeq 0,931.$$

b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

b-

$P_T(M) \simeq 97,8\,\%$ et $P_{\bar T}(\bar M) = 93,1\,\%$

On remarque que $P_T(M) > P_{\bar T}(\bar M)$.

La probabilité d'être malade sachant que le test est positif est plus grande que la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est négative.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de $0,694$.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.

1. a

- On répète 5 fois de manière identique et indépendante une expérience ayant 2 issues possibles avec la probabilité du succès qui vaut $p = P(T) = 0{,}694$
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès parmi ces $n = 5$ expériences par conséquent X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}694$.

b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

b. $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0{,}694^{1}\,(1 - 0{,}694)^{4} \simeq 0{,}03$.

c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

c- On cherche $P(X \geqslant 4)$:

$$P(X \geqslant 4) = P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \binom{5}{4} 0{,}694^4 (1-0{,}694)^1 + 0{,}694^5$$

$$\simeq 0{,}516.$$

L'affirmation du vétérinaire est vraie.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à $0,99$?

2- On cherche la valeur de n à partir de laquelle on a $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.
On résout l'inéquation suivante :

$$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - P(X=0) \geqslant 0,99$$
$$\iff 1 - (1 - 0,694)^n \geqslant 0,99$$
$$\iff 1 - 0,306^n \geqslant 0,99$$
$$\iff 0,306^n \leqslant 0,01$$
$$\iff n \ln(0,306) \leqslant \ln(0,01)$$
$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,306)} \simeq 3,89$$

Donc c'est à partir de $n=4$ coyotes capturés que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif.