∽ Baccalauréat Polynésie 4 mai 2022 ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ sujet n° 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : fonctions, suites**

Cette exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction g définie est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right).$$

Pour tout nombre réel x strictement positif :

a. $g'(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ **b.** $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

c. $g'(x) = \ln(2x+1)$ **d.** $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

2. La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction :

a. $x \longmapsto \ln(x)$ **b.** $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ **c.** $x \longmapsto x\ln(x) - x$ **d.** $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n}.$$

La limite de la suite (a_n) est égale à :

a. $-\infty$ **b.** -1 **c.** 1 **d.** $+\infty$

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2\,;\,2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2]$ est donné par :

x	-2	-1	0	2
variations de f'	1 ↘	0 ↘	-2 ↗	-1

La fonction f est :

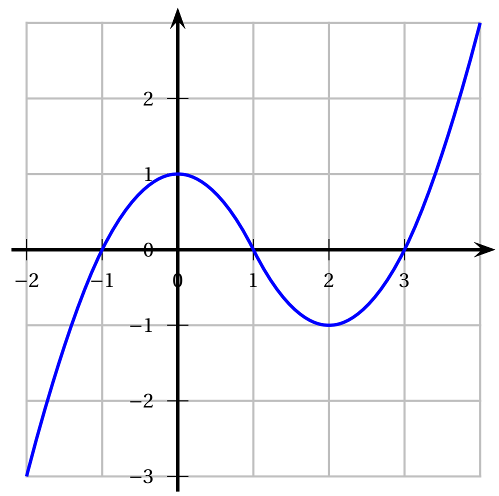
a. convexe sur $[-2\,;\,-1]$

b. concave sur $[0\,;\,1]$

c. convexe sur $[-1\,;\,2]$

d. concave sur $[-2\,;\,0]$

5. On donne ci-dessus la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a. f est décroissante sur $[0\,;\,2]$

b. f est décroissante sur $[-1\,;\,0]$

c. f admet un maximum en 1 sur $[0\,;2]$

d. f admet un maximum en 3 sur $[2\,;\,4]$

6. Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.
La fonction python seuil() qui renvoie le nombre de mois à attendre pour que sa valeur dépasse 200 € est :

a.

```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v < 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

b.

```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v > 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

c.

```
def seuil() :
    v=57
    for i in range (200) :
        v = v*1.03
    return v
```

d.

```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    if v < 200 :
        m=m+1
    else :
        v = v*1.03
    return m
```

Exercice 2 7 points **Thèmes : probabilités**

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.
Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, et de 0,065 3.

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaÃőtre $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?

4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieur à 99 %.

Exercice 3 (7 points) **Thèmes : fonctions, suites**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. a. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b. Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1. def liste(k) :
2.     L = []
3.     u = ...
4.     for i in range(0, k+1) :
5.         L.append(u)
6.         u = ...
7.     return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. Déterminer la valeur de sa limite.

5. **a.** Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

   b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

EXERCICE 4 (7 points **Thèmes : géométrie dans le plan et dans l'espace**

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A(2 ; −1 ; 0) B(1 ; 0 ; −3), C(6 ; 6 ; 1) et E(1 ; 2 ; 4) ;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. **a.** Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}}$ puis les longueurs BA et BC.

   c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ arrondie au degré.

2. **a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan ABC.

   b. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan ABC et passant par le point E.

   d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan ABC à à pour coordonnées $\left(4 ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.

   Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide à ABCE est égal à 16,5 unités de volume.

Correction

Exercice 1

1. On considère la fonction $g \longmapsto \ln\left(x^2+x+1\right)$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.
La fonction $u : x \mapsto x^2+x+1$ est strictement positive et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ (fonction polynomiale,somme de termes strictement positifs), donc la fonction composée $g :\ x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. On a alors :
$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
Réponse d

2. la fonction $g :\ x \mapsto x\ln(x) - x$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et on a
$$g'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} - 1 = \ln(x)+1-1 = \ln(x) = f(x)$$
La fonction g est donc une primitive de f.

Réponse c

3. On factorise par les termes "dominants" du quotient a_n. On a donc pour tout n dans $\mathbb{N}$:
$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n} = \frac{3^n\left(\dfrac{1}{3^n}-1\right)}{2^n\left(\dfrac{1}{2^n}+1\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\dfrac{1}{3^n}-1}{\dfrac{1}{2^n}+1}$$
Par somme et quotient de limites on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{3^n}-1}{\dfrac{1}{2^n}+1} = -1$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$; De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{3}{2} > 1$, donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n) = -\infty$.

Réponse a.

4. La fonction dérivé f' est décroissante sur $[-2\ ;\ 0]$, Donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

Réponse d

5. $f'(x)$ s'annule en $x=1$ en changeant de signe et en passant du positif au négatif, la fonction f va donc admettre un maximum en $x=1$.

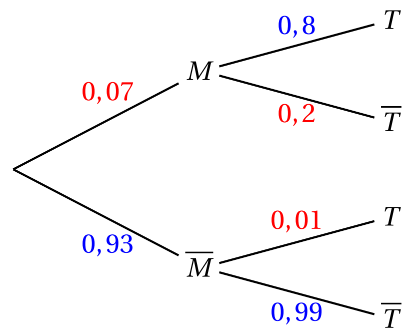
Réponse c

6. La valeur v de l'action augmente donc la boucle while s'exécute tant que $v < 200$ en ajoutant 1 à la valeur m du mois à chaque exécution.

Réponse a.

Exercice 2

1. D'après l'énoncé on a $P(M) = 0,07$, $P_M(\overline{T}) = 0,2$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$.
On complète les donnée sur l'arbre pondéré suivant :



On a donc $P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. Comme M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, on peut utiliser la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01 = 0,0653$$

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif $P_T(M)$.

4. On cherche donc $P_T(M)$. La formule des probabilités conditionnelles donne :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,07 \times 0,8}{0,0653} \approx 0,86$$

5. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

a. Le choix de la personne dans la population étant assimilé à un tirage avec remise, on a une indépendance des 10 tirages, le succès étant défini par le test est positif, on peut assimiler cette variable aléatoire à une loi de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$

b. On cherche $P(X = 2)$,

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8 \approx 0,11$$

6. Soit n le nombre de personnes testées, on cherche $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.
On sait que $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$ avec $P(X = 0) = 0,9347^n$ on a donc les équivalences suivantes :

$$1 - 0,9347^n \geqslant 0,99 \iff 0,9347^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,9347) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,01}{\ln(0,9347} \iff n \geqslant 68,19$$

il faut donc tester au minimum 69 personnes dans ce pays pour qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif.

Exercice 3

1. **a.** $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{3}$ et $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{1}{4}$.

   b.

```
def liste(k) :
    L = []
    u = 1
    for i in range(0, k+1) :
        L.append(u)
        u = u/(1+u)
    return(L)
```

2. Pour tout entier naturel n,on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{-u_n^2}{1+u_n}$$

   Comme pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif on a alors :

$$\frac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$$

   Par conséquent $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc La suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Comme (u_n) est décroissante est minorée par 0, elle est convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

4. La suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. la limite ℓ vérifie donc l'égalité $f(\ell) = \ell$. La résolution de cette équation donne :

$$\frac{\ell}{1+\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell(1+\ell) - \ell = 0 \Leftrightarrow \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$

5. **a.** Les premiers termes de la suite (u_n) sont : $\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$, on peut conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

   b. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété :$u_n = \dfrac{1}{n+1}$. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

   - Initialisation :

   pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   - Hérédité :

   Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   On a alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \dfrac{1}{1+(n+1)}$: $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

   - Conclusion :

   Comme $\mathscr{P}_0$ est vraie, et que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ vraie implique $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie, d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Exercice 4

1. **a.** L'espace est menu d'un repère orthonormé donc le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$ est donné par :

$$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = -1\times4+1\times7-3\times1=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A.

b. On a $\overrightarrow{\text{BA}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = 5-6+12=11$ et les longueurs $BA=\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11}$ et $BC=\sqrt{5^2+6^2+4^2}=\sqrt{77}$

c. Pour calculer la mesure de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$, on exprime le produit scalaire $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}$ de deux façons différentes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = \text{BA}\times\text{BC}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) &\Leftrightarrow 11=\sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\Leftrightarrow 11=\sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{7}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)=\frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

À l'aide de la calculatrice on obtient $\widehat{\text{ABC}}\approx 68°$ au degré près.

2. **a.** Un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.
De plus

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 2\times(-1)-1\times1-1\times(-3)=-2-1+3=0$$

et

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 2\times4-1\times7-1\times1=8-7-1=0$$

$\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

b. Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x-y-z+d=0$. Le point B appartient à ce plan, on a donc

$$2\times1+3+d=0 \iff d=-5$$

Une équation du plan (ABC) est donc

$$2x-y-z-5=0$$

c. La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
De plus $\mathscr{D}$ passe par le point E. On a donc

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D} \iff \overrightarrow{\text{E}M}=t\,\overrightarrow{n},\ \text{ avec }\ t\in\mathbb{R}$$

soit

$$\left\{\begin{array}{rcl}x-1&=&2t\\y-2&=&-t,\quad t\in\mathbb{R}\\z-4&=&-t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+2t\\y&=&2-t,\quad t\in\mathbb{R}\\z&=&4-t\end{array}\right.$$

d. le point H est l'intersection du plan (ABC) avec la droite $\mathcal{D}$, les coordonnées de H vérifient donc les équations du système suivant :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2x-y-z-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 6t-9=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ x = 4 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

3. L'aire $\mathcal{B}$ du triangle rectangle ABC est donnée par $\mathcal{B} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2}$ avec $AC = \sqrt{4^2+7^2+1^2} = \sqrt{66}$ et donc

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2} = \frac{11\sqrt{6}}{2}$$

h=HE est la hauteur de la pyramide. On a $\overrightarrow{\text{HE}} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

On calcule la longueur h= HE $= \sqrt{(-3)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$, Finalement on calcule le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide ABCE

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h = \frac{1}{3} \times \frac{11\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{\frac{27}{2}} = 16,5 \text{ unités de volume}$$