Ex 1 :

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{x}\right) dx$

1. **(a)** Etudier pour tout $x \in]0,+\infty[$, les variation de (I_n).
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.
   Conclure sur la nature de la suite
2. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{n+1} < I_n < \frac{1}{n}$
3. En déduire la limite de I_n.

Ex 2 :

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(4e^t\right) dt$ (b) $\int_0^1 t e^{t^2-1} dt$ (c) $\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1} dt$

Ex 3 :

1. Déterminer a, b et c tel que pour tout $x \neq -2$:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

2. En déduire $I = \int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx$

Ex 4 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.
2. **(a)** Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n :

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$$

   (b) En déduire que pour tout n $\in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Ex 5 :

On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt$$

1. **(a)** Montrer que la suite (x_n) est à terme positifs.
   (b) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $t \in [0 ; 1]$ on $t^{n+1} \cos t \leq t^n \cos t$.
   (c) En déduire les variations de la suite (x_n).
   (d) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. **(a)** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire la limite de la suite (x_n).

Ex 6 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$$

1.a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$

1.b. Montrer que $u_1 = 1 + \ln \frac{2}{1+e}$ et en déduire u_0

2.a. Montrer pour tout entier naturel que $u_n \geq 0$

2.b. Montrer pour tout entier naturel non nul que $u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$

2.c. En déduire que pour tout entier naturel non nul $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$

3. Prouver que (u_n) converge vers une limite à déterminer

Ex 7 :

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

1) $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

2) $I = \int_1^{e^2} \ln t \, dt$

3) $I = \int_0^\pi (x-1) \cos x \, dx$

4) $I = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx$

5) $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t} \, dt$

6) $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$