Exercice 1

Temps indicatif : 20 minutes

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences : CHERCHER ✓ CALCULER ✓ RAISONNER ✓ COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Géométrie dans le plan • Produit scalaire • Signe et variations de fonctions

Soit $A(2\,;2)$, $B(4\,;3)$ et $N(6\,;0)$ dans un repère orthonormé du plan.
On se propose de déterminer le point de la droite (AB) qui est le plus proche du point N.

1. Montrer que l'équation réduite de (AB) est $y=\frac{1}{2}x+1$.

2. Soit $M\left(x\,;\frac{1}{2}x+1\right)$ un point de (AB). Montrer que $MN^2=\frac{5}{4}x^2-11x+37$.

3. Justifier le fait que MN^2 est minimale lorsque MN est minimale.

4. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\frac{5}{4}x^2-11x+37$. Démontrer que f admet un minimum, atteint en $x=\frac{22}{5}$.

5. a. En déduire les coordonnées du point M de (AB) le plus proche de N.
b. Montrer que pour ce point M, les droites (AB) et (MN) sont perpendiculaires.

Exercice 2

Temps indicatif : 30 minutes

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences : CHERCHER ✓ CALCULER ✓ RAISONNER ✓ COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Indépendance de deux événements • Second degré

1. Soit A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.
a. Justifier la relation $P(A)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P(A\cap B)$.
Quelle autre égalité obtient-on en échangeant les rôles de A et B dans cette relation ?
b. En déduire que $P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$. *On pourra utiliser un diagramme.*

2. Sur la planète Mercurne, 99 % des créatures sont riches ou généreuses et il y a autant de créatures riches que de créatures généreuses. De plus, chez les créatures de cette planète, les caractères « riche » et « généreux » sont indépendants et non apparents. On rencontre une créature de cette planète et on note respectivement R et G les événements « Cette créature est riche » et « Cette créature est généreuse ». On pose $x=P(G)$.
a. Montrer que x vérifie $x^2-2x+0{,}99=0$.
b. Quelle est la probabilité que la créature rencontrée soit riche et généreuse ? Justifier.

Exercice 3

Temps indicatif : 40 minutes

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences : CHERCHER ✓ MODÉLISER ✓ CALCULER ✓ RAISONNER ✓ COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Probabilités conditionnelles et variables aléatoires

Une entreprise achète des fruits très mûrs, pommes ou bananes à bas coût. Parmi ses achats, 30 % des fruits sont des pommes qui, selon leur état, sont utilisées pour fabriquer des compotes pour les quatre cinquièmes, ou, pour les autres, sont jetées. De même, 60 % des bananes achetées sont utilisées pour fabriquer des compotes et les autres sont jetées.

1. On choisit au hasard un fruit acheté par cette entreprise et on note respectivement B et J les événements « Ce fruit est une banane » et « Ce fruit va être jeté ».
a. Préciser les probabilités $P(B)$, $P_B(J)$ et $P_{\overline{B}}(J)$, puis tracer un arbre modélisant la situation.
b. Quelle est la probabilité que le fruit choisi soit une banane destinée à être jetée ? Montrer que $P(J)=0{,}34$.
c. Si le fruit choisi est destiné à être jeté, quelle est la probabilité que ce fruit soit une pomme ?

2. Cette entreprise achète les pommes et les bananes au prix de 0,25 € le kg. Les fruits sont ensuite triés et regroupés en cagettes de 4 kg, suivant qu'ils sont destinés à être jetés ou non. Les compotes fabriquées sont revendues au prix de 1,75 € le kg, indépendamment de leur composition. Après le tri des fruits, on choisit une cagette au hasard et on note X le bénéfice algébrique à venir de l'entreprise pour cette cagette. Par exemple, si cette cagette est composée de fruits destinés à être jetés, X est négatif et correspond au coût d'achat de 4 kg de fruits pour l'entreprise.
a. Déterminer la loi de X.
b. Calculer l'espérance de X, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 Temps indicatif : 20 minutes

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
CHERCHER ✓
CALCULER ✓
RAISONNER ✓
COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Signe et variations de fonctions

Soit f la fonction définie sur $]-4\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x+4}$.

1. Montrer que pour tout $x>-4$, la dérivée de f vérifie $f'(x)=\dfrac{2x^3+12x^2+2}{(x+4)^2}$.

2. Pour tout $x>-4$, on pose $g(x)=2x^3+12x^2+2$.
Montrer que la fonction g admet un minimum sur $]-4\,;+\infty[$.

3. Montrer que f est monotone sur $]-4\,;+\infty[$.

Exercice 5 Temps indicatif : 40 minutes

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
CHERCHER ✓
CALCULER ✓
RAISONNER ✓
COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Signe et variations de fonctions

Une grande entreprise commercialise des tablettes tactiles.
Cette entreprise fabrique entre 300 et 800 tablettes par jour et le coût total de fabrication de x centaines de tablettes est modélisé, en millier d'euros, par la fonction C définie sur $[3\,;8]$ par $C(x)=0{,}4x^3-9x+100$ et le coût moyen de fabrication par tablette est égal à $C_M(x)=\dfrac{C(x)}{100x}$, pour tout x dans $[3\,;8]$. Les tablettes sont ensuite vendues 350 euros l'unité.

1. Montrer que pour tout x dans $[3\,;8]$, la dérivée de C_M vérifie :

$$C'_M(x)=\frac{(x-5)(0{,}8x^2+4x+20)}{100x^2}.$$

2. a. En déduire que le coût moyen de fabrication est minimal pour une certaine quantité q de tablettes fabriquées et préciser la valeur de q.
b. Calculer le bénéfice en euro de l'entreprise pour q tablettes produites et vendues au cours d'une journée.

Exercice 6 Temps indicatif : 40 minutes

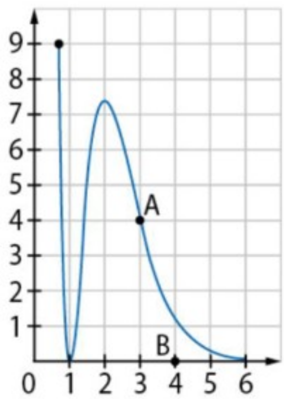
En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
CHERCHER ✓
CALCULER ✓
RAISONNER ✓
COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Dérivation • Second degré • Fonction exponentielle

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0{,}7\,;6]$. On suppose que f est dérivable sur $[0{,}7\,;6]$.
La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.

Partie A. Étude graphique

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-contre.



1. La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points $\mathrm{A}(3\,;4)$ et $\mathrm{B}(4\,;0)$. Calculer $f'(3)$, puis déterminer l'équation réduite de cette tangente.

2. D'après le graphique ci-contre, donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[0{,}7\,;6]$.

Partie B. Étude théorique

On admet que la fonction f est définie sur $[0{,}7\,;6]$ par :

$$f(x)=(x^2-2x+1)\mathrm{e}^{-2x+6}.$$

1. Démontrer que pour tout x dans $[0{,}7\,;6]$, on a $f(x)\geqslant 0$.

2. Montrer que pour tout x dans $[0{,}7\,;6]$, on a $f'(x)=(-2x^2+6x-4)\mathrm{e}^{-2x+6}$.

3. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7\,;6]$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0{,}7\,;6]$.

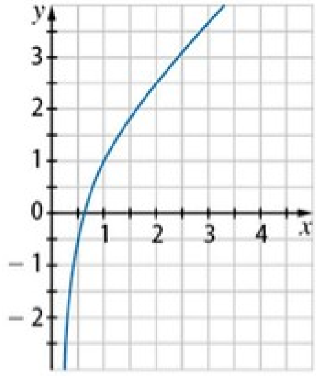
Exercice 9 *Temps indicatif : 25 minutes*

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
CHERCHER ✓
CALCULER ✓
RAISONNER ✓
COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Dérivation • Signe et variations de fonctions

Télécharger la figure de travail ➔ lycee.editions-bordas.fr

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=1+x-\dfrac{1}{x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan, donnée ci-contre.



1. Montrer que la tangente (T) à C au point d'abscisse 1 a pour équation réduite $y=2x-1$, puis tracer (T) sur la figure téléchargée et imprimée.

2. Pour tout $x>0$, on pose $g(x)=2-x-\dfrac{1}{x}$.

a. Montrer que la dérivée g' de g vérifie, pour tout $x>0$:

$$g'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}.$$

b. En déduire les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

c. En utilisant les questions précédentes, montrer que (T) est au-dessus de C sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 10 *Temps indicatif : 40 minutes*

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
CHERCHER ✓
CALCULER ✓
RAISONNER ✓
COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Dérivation • Second degré • Signe et variations de fonctions • Fonction exponentielle

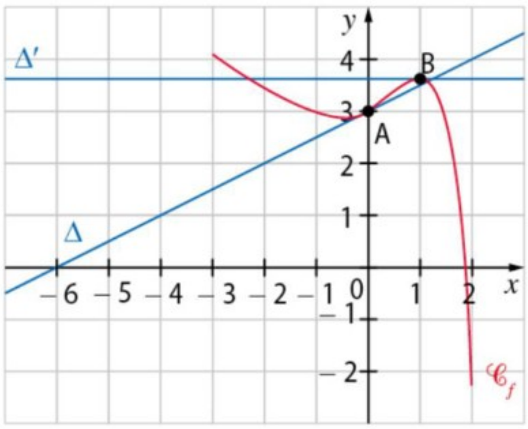
Partie A. Étude graphique

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;2]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Le point A de coordonnées $(0\,;3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$. B est le point d'abscisse 1 appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.

On dispose des informations suivantes :

- la fonction f est strictement décroissante sur $[-3\,;-0{,}5]$ et $[1\,;2]$ et elle est strictement croissante sur $[-0{,}5\,;1]$;
- la droite Δ d'équation $y=0{,}5x+3$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A ;
- la tangente Δ' à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



Chaque réponse devra être justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(1)$.

2. Quel est le signe de $f'(-2)$?

3. Donner la valeur de $f'(0)$.

Partie B. Étude théorique

On admet qu'il existe trois réels a, b et c pour lesquels la fonction f représentée dans la **Partie A** est définie, pour tout réel x de $[-3\,;2]$, par :

$$f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x+5.$$

1. En utilisant l'un des points du graphique, justifier que $c=-2$.

2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3\,;2]$, par $f'(x)=\left(ax^2+(2a+b)x-2+b\right)e^x$. En utilisant les résultats de la **Partie A**, justifier que $b=2{,}5$, puis que $a=-1$.

3. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;2]$: $f'(x)=\left(-x^2+0{,}5x+0{,}5\right)e^x$.

4. Étudier le signe de f', puis dresser le tableau de variation de f sur $[-3\,;2]$.

Exercice 12 *Temps indicatif : 25 minutes*

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
CHERCHER ✓
MODÉLISER ✓
CALCULER ✓
RAISONNER ✓
COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Variables aléatoires • Dénombrement (chapitre 9)

Un jeton est placé sur l'origine d'un repère du plan. On lance deux pièces de monnaie équilibrées et on déplace le jeton en deux temps : si la première pièce donne « Pile », l'abscisse du jeton augmente de 1 et sinon, elle diminue de 1 ; si la seconde pièce donne « Pile », l'ordonnée du jeton augmente de 1, sinon, elle diminue de 1.
Après ce déplacement, on relance les deux pièces de monnaie et on déplace à nouveau le jeton à partir de sa nouvelle position de la même manière suivant les résultats des deux lancers.
On note X l'abscisse du point où se trouve ce jeton après ces deux doubles lancers et déplacements et Y son ordonnée.

1. Déterminer les lois de X et de Y.

2. Soit A et B les événements respectifs $\{X=0\}$ et $\{Y=0\}$: déterminer les probabilités des événements $A \cap B$ et $A \cup B$.

3. Déterminer la probabilité de l'événement $\{Y=X\}$.

Exercice 13 *Temps indicatif : 30 minutes*

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
CHERCHER ✓
MODÉLISER ✓
CALCULER ✓
RAISONNER ✓
COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Fonctions trigonométriques • Signe et variations de fonctions

On considère l'ensemble D des réels x tels que pour tout entier relatif k : $x \neq k\pi$.

Soit f la fonction définie sur D par $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Étudier la parité de la fonction f.

2. Démontrer que la fonction f est π-périodique.

3. On admet que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Montrer que f est dérivable sur $]0\,;\pi[$ et que pour tout x dans $]0\,;\pi[$, $f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2(x)}$.

4. En déduire les variations de la fonction f sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. Résoudre dans $]0\,;\pi[$ chacune des équations suivantes : **a.** $f(x)=0$ **b.** $f(x)=1$

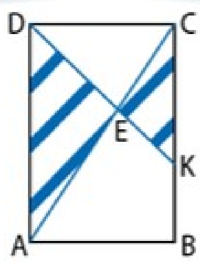
6. Représenter graphiquement la fonction f sur $]-\pi\,;0[\,\cup\,]0\,;\pi[$.

Exercice 14 *Temps indicatif : 20 minutes*

En faisant cet exercice je progresse dans les compétences
CHERCHER ✓
MODÉLISER ✓
CALCULER ✓
RAISONNER ✓
COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Produit scalaire

Tom aime la mode. Il décide de dessiner et de fabriquer un nœud papillon un peu particulier. Il le souhaite original et asymétrique. Il veut aussi que les deux boucles du nœud forment un angle droit au centre du nœud. Il le dessine sur un patron en carton rectangulaire, noté ABCD, de 12 cm de hauteur et de 8 cm de largeur. Malheureusement, Tom ne retrouve pas son équerre ! Dans la figure ci-contre, $AB=8$ et $AD=12$. Soit K un point du segment $[BC]$ et soit E le point d'intersection des droites (DK) et (AC).



1. Déterminer un repère orthonormé du plan tel que le point C a pour coordonnées $(8\,;12)$.

2. On répondra aux questions suivantes avec le repère déterminé précédemment.
a. Quelle est l'abscisse du point K ?
b. Déterminer la position du point K permettant de réaliser le nœud papillon de Tom.

Exercice 15

Temps indicatif : 20 minutes

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
- CHERCHER ✓
- CALCULER ✓
- RAISONNER ✓
- COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Dérivation

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$.

1. Justifier le fait que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que f est également dérivable en 0.

3. On rappelle que la courbe de la fonction racine carrée admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
Soit deux fonctions définies en 0.
a. Si le produit de deux fonctions est dérivable en 0, ces fonctions sont-elles toutes deux dérivables en 0 ? Justifier la réponse.
b. Si le produit de deux fonctions est dérivable en 0, est-il possible qu'aucune de ces deux fonctions ne soit dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

Exercice 16

Temps indicatif : 40 minutes

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
- CHERCHER ✓
- MODÉLISER ✓
- CALCULER ✓
- RAISONNER ✓
- COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Suites numériques

Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration. En journée, la masse d'algues augmente de 2 %, puis à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas la nuit. Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est égale à 2 000 kg. On modélise la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant *n* jours par une suite notée (a_n).
En particulier : $a_0=2\,000$. On admet que cette modélisation demeure valable tant que a_n reste positif.

1. Vérifier par le calcul que la masse a_2 d'algues après deux jours de fonctionnement du système de filtration est égale à 1 878,8 kg.

2. On affirme que pour tout entier naturel *n*, on a $a_{n+1}=1{,}02a_n-100$.
a. Justifier la relation précédente à l'aide de l'énoncé.
b. On considère la suite (b_n) définie pour tout nombre entier naturel *n* par $b_n=a_n-5\,000$.
Démontrer que la suite (b_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
c. Pour tout entier naturel *n*, en déduire une expression de b_n en fonction de *n*, puis montrer que $a_n=5\,000-3\,000\times 1{,}02^n$.
d. Quelle quantité d'algues y aura-t-il au bout de 20 jours (arrondir au kg) ?

3. Au bout de combien de jours les algues auront-elles disparu ?

Exercice 17

Temps indicatif : 30 minutes

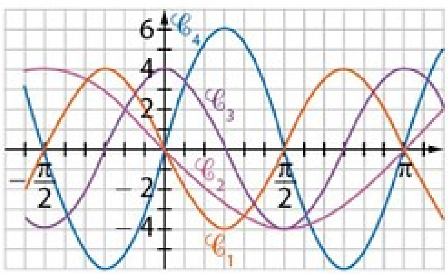
En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
- CHERCHER ✓
- CALCULER ✓
- RAISONNER ✓
- COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Fonctions trigonométriques • Signe et variations de fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4\sin(2x)$.

1. a. Déterminer la valeur exacte de l'image par f de $\frac{\pi}{6}$, en détaillant le calcul.
b. Démontrer que la fonction f est π-périodique.
c. Étudier la parité de la fonction f.

2. a. On admet que la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout x, $\sin'(x)=\cos(x)$. Justifier que f est dérivable, et, pour tout réel x, déterminer l'expression de $f'(x)$.
b. Résoudre l'inéquation $\cos(2x)\geqslant 0$ dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.



3. L'une des représentations graphiques données ci-contre est celle de la fonction f. Laquelle ? Justifier le choix.

Exercice 18 *Temps indicatif : 50 minutes*

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
- CHERCHER ✓
- CALCULER ✓
- RAISONNER ✓
- COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Probabilités conditionnelles • Programmation Python • Fonctions trigonométriques

Au jeu de fléchettes, la zone de tir, appelée cible, est un disque de rayon 22,5 cm, délimité en 20 secteurs angulaires de même dimension et numérotés. La zone du triple est délimitée par deux cercles de rayons respectifs 10 et 10,8 cm, de même centre que la cible.

Partie A. Tirage pseudo-aléatoire

Un programme informatique permet de simuler le jet d'une fléchette aléatoirement, de telle sorte que :
- la fléchette touche toujours la cible ;
- la probabilité qu'elle touche une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

On donnera les résultats à 10^{-4} près.

1. Calculer la probabilité que la fléchette touche la zone « du triple ».

2. a. Calculer la probabilité que la fléchette touche la zone « du 20 ».
Pour simplifier, on considèrera que chaque zone numérotée est un secteur angulaire dont le centre est celui de la cible.
b. Calculer la probabilité que la fléchette touche la zone du « triple 20 ».

3. a. Quelle est la probabilité que la fléchette touche la zone du « triple 20 » sachant qu'elle a touché la zone du « triple » ?
b. Quelle est la probabilité que la fléchette touche la zone du « triple 20 » sachant qu'elle a touché la zone « du 20 » ?

Partie B. Simulation avec Python

On considère un autre programme informatique simulant le jet d'une fléchette.
La fonction Python `lance_flechette()` ci-contre génère aléatoirement une liste contenant deux éléments :
- la mesure d'un angle, en radian ;
- une distance au centre de la cible, en cm.

```
from math import*
from random import*

def lance_flechette():
    angle=random()*2*pi
    distance=random()*22.5
    return [angle,distance]
```

1. La fléchette atteint-elle toujours la cible ?

2. a. Écrire une fonction Python permettant de générer 1 000 000 lancers de fléchettes avec `lance_flechette()` et qui renvoie le nombre de fléchettes qui touchent la zone « du triple ».
b. Reprendre la question précédente pour les fléchettes qui touchent la zone « du 20 ».
c. La probabilité de toucher une zone avec ce programme semble-t-elle proportionnelle à l'aire de cette zone ? Justifier.

Exercice 19 *Temps indicatif : 40 minutes*

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
- CHERCHER ✓
- CALCULER ✓
- RAISONNER ✓
- COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Probabilités conditionnelles • Suites numériques

Dans une serre, un horticulteur a planté des roses et des tulipes : 40 % des tulipes sont rouges et 24 % des fleurs de la serre sont des tulipes rouges. De plus, la moitié des roses sont rouges.

Partie A. Tirage aléatoire d'une fleur

On choisit au hasard une fleur dans cette serre et on note :
- T l'événement « La fleur choisie est une tulipe » ;
- R l'événement « La fleur choisie est rouge ».

1. Donner les valeurs des probabilités : $P(\mathrm{T} \cap \mathrm{R})$, $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{R})$ et $P_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{R})$.

2. Calculer la probabilité de l'événement « La fleur choisie est une tulipe ».

3. En déduire que $P(\mathrm{R}) = 0,44$.

4. Calculer $P_{\mathrm{R}}(\mathrm{T})$ sous forme de fraction irréductible, puis en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Partie B. Évaluation d'une population

L'apparition d'un parasite a pour conséquence que, chaque mois, 5 % des tulipes rouges meurent.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le pourcentage de tulipes rouges encore en vie après n mois, de sorte que $u_0 = 100$.

1. Justifier le fait que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

2. Quel pourcentage des tulipes rouges seront encore en vie après six mois ? *On arrondira à 1 % près.*

3. L'horticulteur estime que la production des tulipes rouges ne sera plus rentable lorsque leur nombre sera inférieur à 20 % de leur nombre initial et il arrêtera alors leur production. À l'aide d'une calculatrice, déterminer après combien de mois il arrêtera la production de tulipes rouges.

Exercice 20 *Temps indicatif : 40 minutes*

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
- CHERCHER ✓
- MODÉLISER ✓
- CALCULER ✓
- RAISONNER ✓
- COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Suites numériques • Programmation Python

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :
- en 2018, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel r, on note r_n la population en zone rurale exprimée en millions d'habitants, en l'année $2018+n$, et c_n la population en ville exprimée en millions d'habitants, en l'année $2018+n$.
On a donc $r_0=90$ et $c_0=30$.

1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} r_{n+1}=0{,}9r_n+0{,}05c_n \\ c_{n+1}=0{,}95c_n+0{,}1r_n \end{cases}$$

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $s_n=r_n+c_n$. Montrer que (s_n) est une suite constante.

3. Déduire des questions précédentes que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $r_{n+1}=0{,}85r_n+6$.

4. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$, $w_n=r_n-40$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, en déduire l'expression de w_n, puis de r_n et c_n en fonction de n.

6. On cherche à déterminer la première année pour laquelle la population rurale sera inférieure à 45 millions d'habitants.

a. Écrire un algorithme permettant de déterminer cette année.

b. Traduire cet algorithme par une fonction en langage Python, puis donner la valeur renvoyée par la fonction.

Exercice 8 *Temps indicatif : 25 minutes*

En faisant cet exercice, je progresse dans les compétences
- CHERCHER ✓
- MODÉLISER ✓
- CALCULER ✓
- RAISONNER ✓
- COMMUNIQUER ✓

Prérequis : Dérivation • Fonction exponentielle

La passerelle de Mazamet est un chemin aérien unique en Occitanie. Elle mesure 140 mètres de long et permet de relier le village médiéval d'Hautpoul à Mazamet.
Située à 70 mètres au-dessus du sol, elle offre un point de vue exceptionnel sur la vallée de l'Arnette.
Pour réaliser ce chemin, des câbles ont été nécessaires.
Dans un repère du plan adapté, la hauteur (en mètre) des câbles en fonction de la distance (en dizaine de mètres) parcourue sur la passerelle (supposée horizontale) est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;14]$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{0{,}1(x-7)}+\mathrm{e}^{-0{,}1(x-7)}.$$

On se propose de démontrer de deux façons différentes l'affirmation suivante : quel que soit l'endroit où l'on se situe sur la passerelle, la hauteur des câbles est toujours supérieure ou égale à 2 m.

Partie A. Première méthode

a. Montrer que pour tout réel t, on a $\dfrac{(\mathrm{e}^t-1)^2}{\mathrm{e}^t}=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}-2$.

b. En déduire le signe de $\mathrm{e}^{0{,}1(x-7)}+\mathrm{e}^{-0{,}1(x-7)}-2$, où $x\in[0\,;14]$, puis conclure.

Partie B. Deuxième méthode

On rappelle que f est la fonction définie sur $[0\,;14]$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{0{,}1(x-7)}+\mathrm{e}^{-0{,}1(x-7)}.$$

a. Justifier la dérivabilité de f sur $[0\,;14]$ puis, pour tout réel x dans $[0\,;14]$, calculer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f.

b. En déduire que f est décroissante sur $[0\,;7]$ et croissante sur $[7\,;14]$.

c. Conclure.