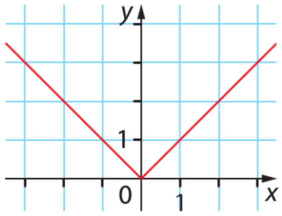
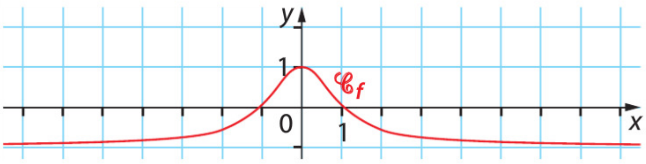
1 On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction valeur absolue.



a. Conjecturer les limites de la fonction valeur absolue en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. Démontrer la conjecture.

2 En s'inspirant de l'exercice corrigé ci-dessus, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 3x)$.

3 La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ ci-contre est celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.



a. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale que l'on déterminera.
b. Démontrer que la fonction f est bornée.

4 Soit une fonction f telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
Démontrer, en utilisant le définition de la limite, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x de l'intervalle $]a\,;+\infty[$, $f(x) > 0$.

5 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x}{x + 2}$.

6 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x})$.

7 On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$.
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

8 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

9 Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{2x^2 - 3}\right) = 0$.

10 On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}.$$
a. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en 1.
b. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x \text{ pour } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ pour } x \geqslant 1 \end{cases}.$$
La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

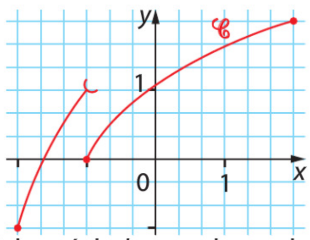
12 Étudier la continuité de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = E\left(\frac{x}{x + 1}\right),$$
E désignant la fonction partie entière.

13 On considère la fonction f définie pour $x \neq 0$ par :
$$f(x) = \frac{3x^2 + 2|x|}{x}.$$
a. Simplifier $f(x)$ pour $x \geqslant 0$ et en déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.
b. Calculer de même $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$.
c. Peut-on trouver une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x \neq 0$, $g(x) = f(x)$?

14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 18x + 9.$$
a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a.
b. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

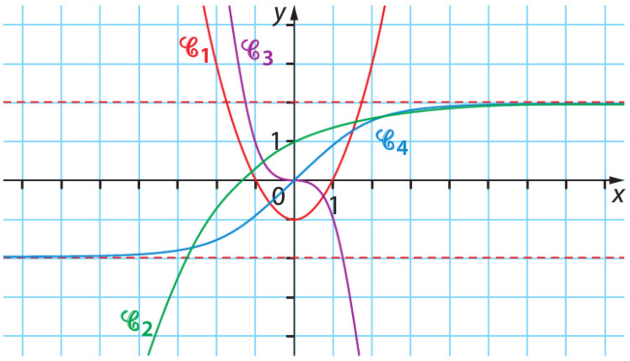
15 On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = 2(x - 2)\sqrt{x} + 1.$$
a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions a et b.
b. Déterminer des valeurs approchées de a et b à 10^{-2} près.

16 On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

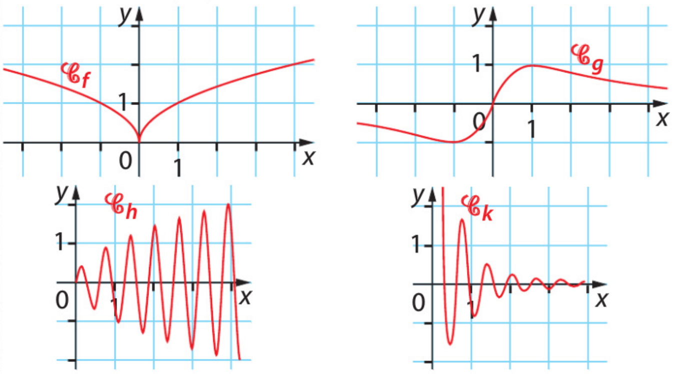


a. La fonction f est-elle continue sur $[-2\,;2]$?
b. Déterminer graphiquement les réels k pour lesquels l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution.
c. LOGIQUE En déduire que la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires peut être vérifiée pour certaines fonctions qui ne sont pas continues.

29 On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $\mathbb{R}$, de courbes représentatives $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$.
Quelles semblent être leurs limites en $-\infty$ et en $+\infty$?



30 Conjecturer graphiquement la limite éventuelle des fonctions f, g, h et k suivantes en $+\infty$.



31 **Démonstrations du cours**

➔ Voir le cours, page 54.

1 **a.** Soit un réel ϵ strictement positif.

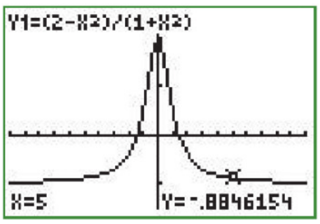
Résoudre sur $\mathbb{R}^*$ l'inéquation $\dfrac{1}{x^2} \leqslant \epsilon$.

b. En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

2 Démontrer de la même façon que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

32 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2 - x^2}{1 + x^2}.$$



1 Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2 **a.** Déterminer un réel a tel que :
Si $x \geqslant a$, alors $f(x) - (-1) \leqslant 10^{-4}$.

b. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

c. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

d. Que représente la droite d'équation $y = -1$ pour la courbe représentative de f ?

3 Justifier que la fonction f est bornée.

33 Soit la fonction f définie sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x + 4}{x + 2}.$$

1 En tabulant $f(x)$ à la calculatrice pour des valeurs de x « grandes », conjecturer la limite de f en $+\infty$.

2 **a.** Exprimer $|f(x) - 3|$ en fonction de x.

b. Démontrer la conjecture émise à la question **1**. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

34 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 3}{x^2}.$$

1 Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

2 **a.** Conjecturer la limite de f en $+\infty$.

b. Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2$.

3 **a.** Démontrer que pour tout $x > 1$, $|f(x) - 2| \leqslant \dfrac{2}{x}$.

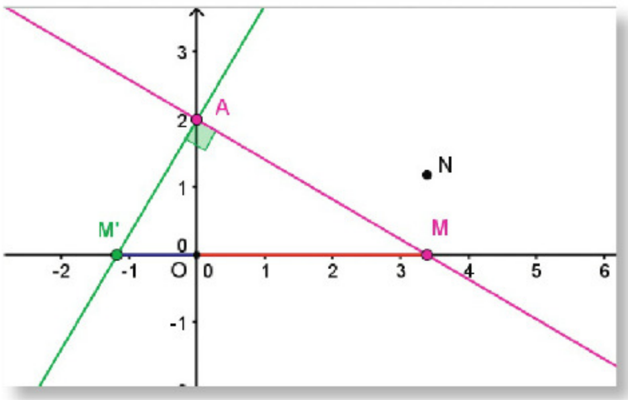
b. Soit un réel $\epsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un réel A tel que pour tout $x \geqslant A$, $|f(x) - 2| \leqslant \epsilon$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.

c. Que représente la droite $\mathscr{D}$ pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

35 Soit une fonction f décroissante sur $]0\,;+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) \geqslant 0$.

36 Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(0\,;2)$ et un point $M(x\,;0)$ avec $x > 0$.
La perpendiculaire en A à la droite (AM) coupe l'axe des abscisses en M'.
On pose $y = OM'$.



1 **a.** **En utilisant un logiciel de géométrie dynamique,** construire les points A, M et M', ainsi que le point N de coordonnées $(x\,;y)$.

b. Que peut-on dire du point M' lorsque l'abscisse x devient « grande » ? devient « proche » de 0 ?

c. En affichant la trace du point N, confirmer ou infirmer les résultats du **b.**

2 **a.** Démontrer que la fonction f qui à x associe y est telle que $f(x)=\frac{4}{x}$.

b. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) \geqslant 10^5$?

c. Que peut-on dire de $f(x)$ lorsque $x \geqslant 10^5$?

37 Démonstrations du cours

Voir le cours, page 54.

1 **a.** Soit A un réel strictement positif.
Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $x^2 \geqslant A$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

c. Démontrer de la même façon que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

2 Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

38 Soit une fonction f définie sur $]-\infty\,;0[$.
On donne deux propositions :

- P_1 : « Il existe un intervalle $]-\infty\,;A[$ qui contient tous les réels $f(x)$ pour tout réel x assez grand. »
- P_2 : « Tout intervalle $]-\infty\,;A[$ contient tous les réels $f(x)$ lorsque x est assez grand. »

Laquelle des propositions P_1 ou P_2 est la définition de « $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ » ?

39 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f, g et h définies ci-dessous sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -x^3\ ; \qquad g(x) = 5-2x\ ; \qquad h(x) = -3x^2.$$

40 **1** Construire la représentation graphique de la fonction carré et rappeler ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

2 En déduire les représentations graphiques des fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2$ et $h(x) = x^2+5$.

3 Déterminer, par lecture graphique, les limites de g et h en $-\infty$ et en $+\infty$.

41 Fonction sans limite à l'infini

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

1 Justifier que f ne peut pas admettre de limite infinie en $+\infty$.

2 Calculer pour tout entier k les images par f de :

$$x_k = k\pi \quad \text{et} \quad y_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

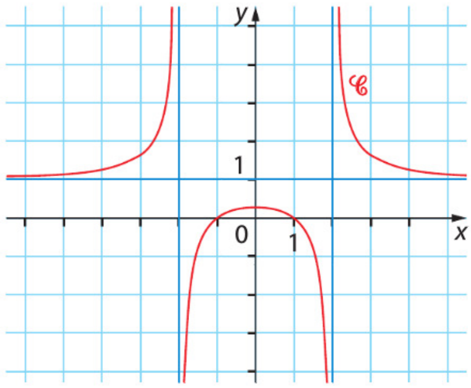
3 Justifier que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

44 Dans chacun des cas suivants, donner une allure possible de la courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

45 Une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\,;2\}$ est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}$.



On a tracé les asymptotes d'équations $x=-2$, $x=2$ et $y=1$.
Lire les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en -2 (à droite et à gauche) et en 2 (à droite et à gauche).

46 On donne le tableau de variations d'une fonction f, de courbe représentative $\mathscr{C}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	3

1 Préciser les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.

2 Tracer une allure possible de $\mathscr{C}$.

47 Démonstration d'un résultat du cours

Voir le cours, page 56.

1 Soit A un réel strictement positif.
Résoudre sur $\mathbb{R}^*$ l'inéquation $\frac{1}{x^2} > A$.

2 En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$.

48 Soit la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

1 **À l'aide de la calculatrice,** conjecturer la limite de f en 1.

2 Soit un réel $a > 0$. Démontrer que pour tout réel $x \neq 1$:

$$\text{si } |x - 1| \leqslant a, \text{ alors } \frac{1}{(x-1)^2} \geqslant \frac{1}{a^2}.$$

3 **a.** Donner la définition d'une fonction qui admet une limite égale à $+\infty$ en 1.

b. Démontrer la conjecture émise à la question **1**.

4 Donner une équation de l'asymptote verticale à la courbe représentative de f.

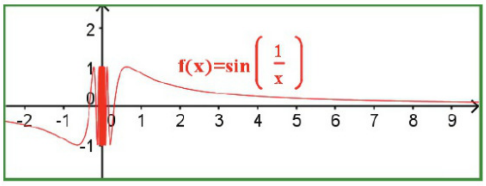
49 **Fonctions n'ayant pas de limite en un point**

1 **a.** Démontrer que la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite en 0.

b. Admet-elle une limite en 0 sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$? et sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$?

2 **a.** La fonction $f : x \longmapsto \sin\frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ admet-elle une limite en 0 ?

b. Admet-elle une limite en 0 sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$? et sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$?



52 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ dont on donne le tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Dresser, en justifiant, les tableaux de variations des fonctions $-f$, $|f|$, f^2 et $\frac{1}{f}$, en précisant les limites aux bornes de $\mathbb{R}^*$.

53 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} x(x-3)$; **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2(x+2)+1$.

54 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\right]$; **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x\left(x + \frac{3}{x}\right)$.

55 Déterminer :

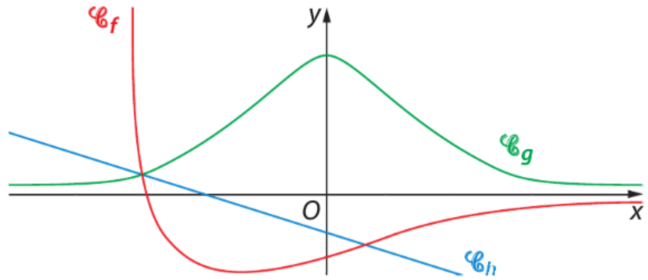
1 $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+3)\left(\frac{1}{x} - 4\right)$. **2** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} \times (x+5)$.

56 Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f, g et h suivantes, après avoir vérifié qu'elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

a. $f : x \longmapsto -x^3 + 2x^2 - 4$. **b.** $g : x \longmapsto \frac{x}{2+3x^2}$.

c. $h : x \longmapsto \frac{9x^3+1}{x^2-4x+5}$.

57 Le graphique donne les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$.
L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et à la courbe $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ et $+\infty$; de plus $\mathscr{C}_h$ est une droite et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



Donner, si possible, les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions : $f+g$; $f-g$; fg ; fh ; $g-h$; $\frac{f}{g}$; $\frac{f}{h}$; $\frac{g}{h}$ et $f \circ h$.

58 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x}{4-x^2}$; **b.** $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x}{4-x^2}$; **c.** $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x}{4-x^2}$;

d. $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x}{4-x^2}$; **e.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{4-x^2}$.

59 Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f dans chacun des cas suivants :

a. $f : x \longmapsto \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 - 1)$ sur $]0 ; +\infty[$;

b. $f : x \longmapsto \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 - 1)$ sur $]-\infty ; 0[$;

c. $f : x \longmapsto \frac{(3-2x)^3}{1-x}$ sur $]-\infty ; 1[$;

d. $f : x \longmapsto \frac{x^2-4x+4}{x-2}$ sur $]2 ; +\infty[$.

60 Même exercice que l'exercice **59**.

a. $f : x \mapsto \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\right)$ sur $]0\,;4[$;

b. $f : x \mapsto \frac{4x+1}{x^2+5x+6}$ sur $]-3\,;-2[$;

c. $f : x \mapsto \frac{x^2-2x-15}{10-2x}$ sur $]5\,;+\infty[$;

d. $f : x \mapsto 2x-1+\frac{3}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

61 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-3x}{x^2+x}$.

1 Tracer la courbe représentative de f à la calculatrice. Conjecturer la limite de f en 0 et en $+\infty$, ainsi que ses variations.

2 Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

3 **a.** Calculer $f'(x)$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
c. En déduire le tableau complet des variations de f.

62 Limite d'un polynôme à l'infini

1 Soit une fonction f polynôme de degré n (entier). On pose pour tout réel x :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \,;$$

les a_i sont réels tels que $a_n \neq 0$.
En factorisant par $a_n x^n$, démontrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n.$$

2 Déterminer rapidement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:
a. $f(x) = -3x^4 + 2x^3 + 4x + 1$;
b. $g(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 4$.

63 Déterminer :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+5}{4x+1}}$; **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}$;

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+1}}$; **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$.

64 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} - x.$$

1 Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2 Démontrer que pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

66 BAC **Démonstration du cours**

Voir les théorèmes du cours, page 58.

Soit un réel a. On considère deux fonctions f et g définies sur $[a\,;+\infty[$ telles que pour tout réel $x \geqslant a$, $f(x) \leqslant g(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

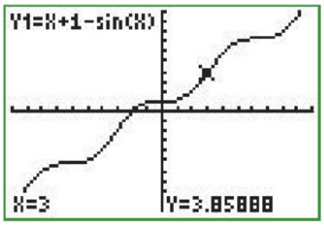
1 Rappeler la définition mathématique de :

« $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ».

2 En déduire que la fonction g tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

67 Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - \sin x.$$



68 Déterminer la limite de f en $+\infty$ dans chacun des cas suivants :
a. $f(x) = (2-\sin x)\times x^2$;
b. $f(x) = \frac{3x}{\cos x - 3}$.

69 **1** Montrer que pour tout réel x :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2-\cos x} \leqslant 1.$$

2 En déduire les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x}$; **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$.

70 **1** Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x+1} \leqslant 1.$$

2 En déduire les valeurs de :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

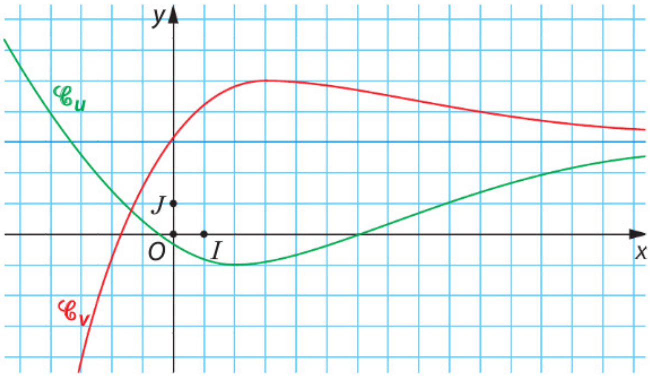
71 f est une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que :

- pour tout $x \geqslant 1$, $\frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$;
- pour tout $x \in]0\,;1[$, $\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$.

1 Peut-on en déduire la limite de f en $+\infty$? Si oui, la donner.

2 Peut-on en déduire la limite de f en 0 ? Si oui, la donner.

72 Soient deux fonctions u et v représentées ci-dessous.



On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que :
- $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$;
- $f(x) \geqslant u(x)$ pour tout $x \in]-\infty\,;-4]$.

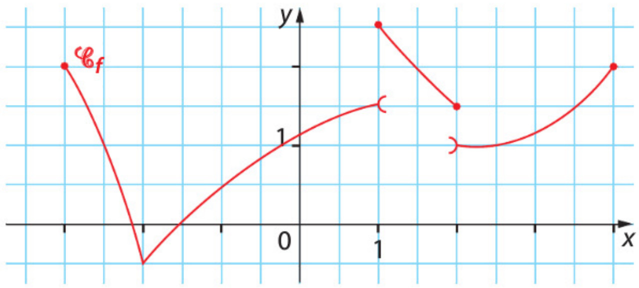
a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b. Reproduire le graphique et donner une allure possible de la courbe représentative de f.

73 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{E(x)}{x},$$

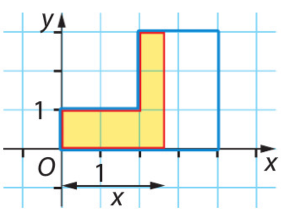
où E désigne la fonction partie entière.
a. Démontrer que, pour tout réel x, $x - 1 \leqslant E(x) \leqslant x$.
b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

77 On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$.



1 La fonction f est-elle continue :
a. en -2 ? **b.** en 1 ? **c.** en 2 ?
2 La fonction f est-elle continue sur l'intervalle :
a. $[-3\,;0]$? **b.** $[1\,;2]$? **c.** $]2\,;4]$?
3 Donner un intervalle de longueur 4 sur lequel la fonction f est continue.

78 Pour $x \in [0\,;4]$, $f(x)$ est l'aire de la partie colorée sur la figure ci-contre.
La fonction f est-elle continue en 2 ?



79 Pour chacun des cas, tracer la courbe représentative de la fonction f et préciser si f est continue sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$;

b. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

80 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 4|$.
1 Tracer la courbe représentative de la fonction f.
2 La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

81 Dans chacun des cas, quelle valeur doit-on donner au réel m pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

1 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ m & \text{si } x = -1 \end{cases}$.

2 $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = m \end{cases}$.

82 Soit f la fonction définie pour $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}.$$

1 **À l'aide de la calculatrice,** conjecturer le comportement de f au voisinage de 1.
2 Prouver ou infirmer la conjecture.

83 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\,;3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}.$$

1 Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.
2 Démontrer que la courbe représentative de f admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

84 Déterminer :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x + 5}{4x + 1}}$. **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

85 Déterminer :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos\left(\dfrac{1}{2x + 1}\right)$. **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x + 1}{2x + 3}\right)$.

86 Vrai ou faux ?

Justifier la réponse.

Soit f une fonction dont le tableau des variations est :

x	$-\infty$		-1		0		1		2		4		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	-3	↗	0	↗	1

1 L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution.

2 L'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution.

3 L'image par f de l'intervalle $]0\,;4]$ est l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

4 Le signe de f est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

87

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-3\,;2]$ dont on connaît le tableau des variations.

x	-3		-2		1		2
$f(x)$	2	↘	-1	↗	1	↘	0

Donner les images par la fonction f des intervalles :

$[-2\,;1]$; $[-2\,;2]$; $[-3\,;1]$.

88

Soit f une fonction dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

1 Donner les images par f des intervalles :

$]-\infty\,;0[$; $[0\,;2[$; $]-\infty\,;2[$; $]2\,;+\infty[$.

2 Déterminer le nombre de solutions de l'équation :

a. $f(x) = 0$. **b.** $f(x) = 1$.

89

Soit la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = x^5 - 5x + 2.$$

1 Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

2 En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.

90

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation proposée a au moins une solution dans l'intervalle I.

1 $x\sqrt{x+2} = 2$; $\mathrm{I} = [-2\,;2]$.

2 $(x^3+1)x^2 = 1$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

91

Démontrer que l'équation $x^3 - x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et encadrer celle-ci par deux entiers successifs.

92

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1.$$

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$ dont une entière.

95

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1.$$

Déterminer, selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

97

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x + 1.$$

1 Exprimer $f'(x)$.

2 **a.** Étudier les variations de la fonction dérivée f'.

b. Justifier que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

c. En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3 Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.