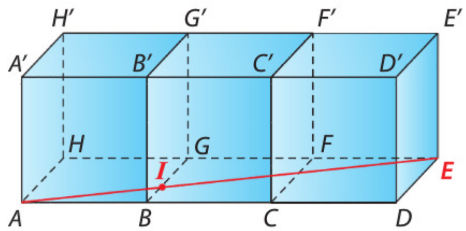
37 La figure ci-dessous est composée de trois cubes identiques accolés.



1 Écrire sous forme d'un vecteur unique les sommes :
$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{C'D}$; $\overrightarrow{BH'}+\overrightarrow{F'E}$;
$2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}$; $-3\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DF'}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BB'}$.

2 Démontrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

3 Soit J le point d'intersection de la droite (AE') et du plan $(BB'G')$. Démontrer que $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE'}$.

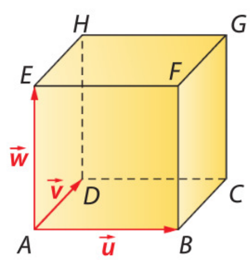
38 On considère un tétraèdre $ABCD$. Le point I est le milieu du segment $[AD]$.

1 Construire les points E et F tels que :
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED} \text{ et } \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}.$$

2 **a.** Exprimer $\overrightarrow{CI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$.
b. En utilisant la relation de Chasles, montrer que :
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}.$$

3 En déduire que les droites (CI) et (EF) sont parallèles.

39 Soit un cube $ABCDEFGH$.

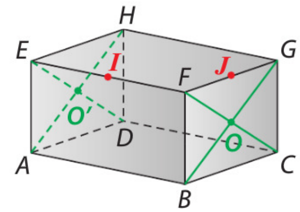


1 Identifier les points I, J et K définis par :
$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$;
$\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HA}$
et $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{DH}$.

2 Construire les points M et N tels que :
$$\overrightarrow{BM}=-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w} \text{ et } \overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}.$$

3 Soit x un nombre réel et P le point défini par :
$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CN}+x\vec{u}.$$
Déterminer x pour que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CP}$ soient colinéaires.

40 $ABCDEFGH$ est un pavé droit. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FG]$. Les points O et O' sont les centres respectifs des faces $BCGF$ et $ADHE$.



1 Identifier les points M, N et P définis par :
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$;
$\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{DA}$.

2 Construire le point K tel que $\overrightarrow{DK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$.

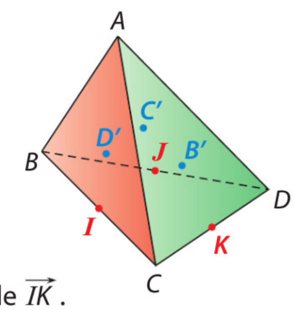
3 Démontrer que les points C, K et I sont alignés.

41 On considère un tétraèdre $ABCD$.

1 Construire les points I et J définis par :
$$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{CJ}=2\overrightarrow{BC}.$$

2 Démontrer que les droites (IC) et (AJ) sont parallèles.

42 $ABCD$ est un tétraèdre.
I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BD]$ et $[CD]$.
B', C' et D' sont les centres de gravité respectifs des triangles ACD, ABD et ABC.

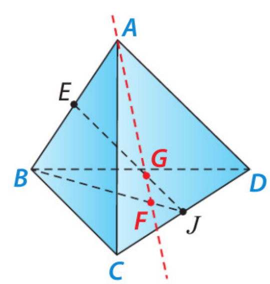


1 Exprimer $\overrightarrow{B'D'}$ en fonction de $\overrightarrow{IK}$.
En déduire que les droites $(B'D')$ et (BD) sont parallèles.

2 Démontrer de même que les droites $(B'C')$ et (BC) sont parallèles.

3 Déterminer la position relative des plans (BCD) et $(B'C'D')$.

43 Soit $ABCD$ un tétraèdre, E le milieu du segment $[AB]$ et J celui de $[CD]$. Le point G est le centre de gravité du triangle ECD. La droite (AG) coupe le plan (BCD) en F.



1 Déterminer les coordonnées du point F dans le repère $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BD})$ du plan (BCD).

2 Vérifier que les points B, F et J sont alignés.

44 Soit $ABCD$ un tétraèdre et I le point défini par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. J et K sont les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[IJ]$. La droite (AK) coupe le plan (BCD) en L.

1 Déterminer les coordonnées du point L dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ du plan (BCD).

2 Vérifier que les points B, L et J sont alignés.

45 $ABCDEFGH$ est un pavé droit. Identifier :

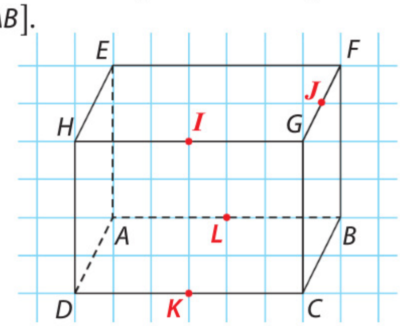
a. la droite passant par A dirigée par $\overrightarrow{EG}$;
b. la droite passant par H dirigée par $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GC}$;
c. le plan passant par B et dirigé par $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$;
d. le plan passant par D et dirigé par $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CF}$;
e. le plan passant par E et dirigé par $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF}$.

46 $ABCD$ est un tétraèdre.
Soit $\mathscr{D}_1$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, et $\mathscr{D}_2$ la droite passant par le point B et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$.

1 Réaliser une figure.

2 Justifier que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes. Préciser leur point d'intersection.

47 $ABCDEFGH$ est un pavé droit. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[GH]$, $[FG]$, $[CD]$ et $[AB]$.



Pour chacun des plans suivants, proposer deux couples différents de vecteurs directeurs :

a. plan (ABC) ; **b.** plan (IFB) ;
c. plan (IJK) ; **d.** plan (EIA) ;
e. plan (AGH) ; **f.** plan (DLI).

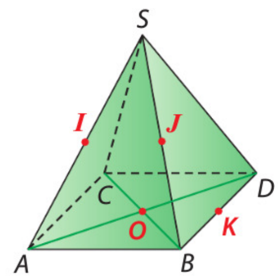
48 On reprend la figure de l'exercice **47**. Dans chaque cas, proposer un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans considérés ci-dessous :

a. (EFH) et (ABG) ; **b.** (BLK) et (CFG) ;
c. (EHL) et (FGK) ; **d.** (EJA) et (BDH).

49 Soit $SABCD$ une pyramide à base carrée $ABCD$.
La droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DS}$, et la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}$ sont-elles sécantes ?

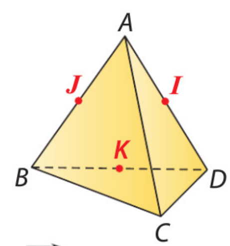
Conseil On pourra introduire les milieux J et K des segments $[SC]$ et $[SB]$.

50 $SABDC$ est une pyramide de base carrée $ABDC$. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[SA]$, $[SB]$ et $[BD]$.
Identifier les ensembles de points suivants :



a. $\mathscr{E}_1$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{IJ},\ t \in \mathbb{R} ;$$
b. $\mathscr{E}_2$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{JM} = u\,\overrightarrow{SD},\ u \in \mathbb{R} ;$$
c. $\mathscr{E}_3$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{BM} = k\,\overrightarrow{SA},\ k \in \mathbb{R} ;$$
d. $\mathscr{E}_4$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{SB} + y\,\overrightarrow{SC},\ x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

51 $ABCD$ est un tétraèdre. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[AB]$ et $[BD]$.
Dans chaque cas, dire si les vecteurs considérés sont coplanaires.



a. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{JK}$; **b.** $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$;
c. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CK}$; **d.** $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{BD}$.

52 $ABCD$ est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.
Les points J et L sont définis par :
$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

1 Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ?

2 Préciser la section du tétraèdre par le plan (IJK).

56 $ABCD$ est un tétraèdre. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.
Les points E et F sont définis par :
$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}.$$

Démontrer que les points D, I, J et F sont coplanaires.