Études de fonctions

Exercice 20

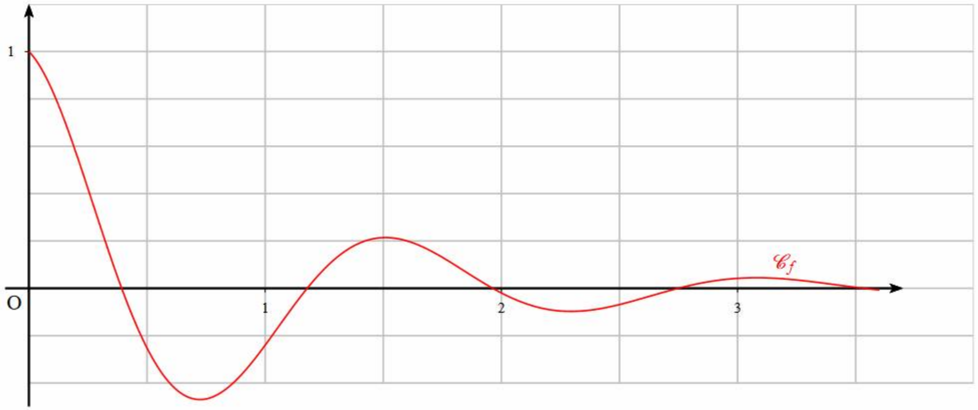
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2}{2+\cos x}$

1) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que la fonction f est paire et 2π-périodique.
   En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction f.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0;\pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi;\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi\ ;\ 3\pi]$

Exercice 21

Soit les fonctions f et g définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x}\cos(4x)$ et $g(x) = e^{-x}$.

On a tracé $\mathscr{C}_f$ ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f.



1) a) Montrer que : $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[,\ \ -e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.
   b) Que peut-on conjecturer pour les grandes valeurs de x ?
2) Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3) On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
   b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.
4) a) Montrer que : $\forall x \in [0\ ;+\infty[,\ \ f'(x) = -e^{-x}[\cos(4x) + 4\sin(4x)]$.
   On rappelle que $[\cos(ax+b)]' = -a\sin(ax+b)$.
   b) En déduire que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.
5) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite (T) tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
   Compléter le graphique ci-dessous en y traçant (T) et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 22

La fonction tangente

Soit la fonction tangente, notée tan, définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ par : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1) Expliquer pourquoi la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$.
2) a) Montrer que la fonction tangente est impaire et π-périodique.
   b) En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction tangente.
3) a) Montrer que la dérivée de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ peut se mettre sous la forme : $\tan' x = 1 + \tan^2 x$.
   b) Que peut-on en déduire sur les variations de la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4) Déterminer la tangente (T_0) en 0 puis tracer la fonction tangente et (T_0) sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 5

Étude d'une fonction trigonométrique **(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos^2 x + \cos x + 1$.

1) Montrer que la fonction f est paire et 2π-périodique.
   En déduire un intervalle d'étude de la fonction f.
2) Montrer que la fonction dérivée f' a pour expression : $f'(x) = \sin x(-2\cos x - 1)$.
3) Résoudre l'inéquation $-2\cos x - 1 \geqslant 0$ dans l'intervalle $[0\ ;\pi]$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ \pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
5) Sur la feuille donnée en annexe, tracer la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$. On tracera les tangente horizontales.