Ex 1 : (*) - Polynômes de TAYLOR

Soit $f(x)=2x^3-4x^2-5x-1$; vérifier que f vérifie la décomposition de TAYLOR : $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$

Ex 2 : (*) - Décomposition à l'aide de sommes usuelles

Déterminer une décomposition de TAYLOR d'ordre n pour les fonctions

$f(x)=\frac{1}{1-x}=\lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ et $g(x)=e^x=\lim_{n\to+\infty} Q_n(x)$

Ex 3 : (*) - Formule générale de TAYLOR

Théorème (admis) : Pour tout fonction f , de classe $C^n(\mathbb{R})$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

(on appelle cette décomposition : un développement limité d'ordre *n* de *f*)

la notation de LANDAU « $g(x)=o(x^n)$ » signifie : $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}=0$

Vérifier la décomposition en développements limités d'ordre n des fonctions suivantes :

1. $\boxed{\exp(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\,.}$
2. $\boxed{\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})\,.}$
3. $\boxed{\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})\,.}$
4. $\boxed{\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n)\,.}$
5. $\boxed{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\,.}$

En déduire les décompositions en développements limités d'ordre n des fonctions suivantes : $ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Ex 4 : (*) - Décomposition en développements limités d'ordre n

1) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ par changement de variable
2) $f(x)=\ln(1+x)$ par intégration termes à termes
3) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ par changement de variable
4) $f(x)=\arctan(x)$ par intégration termes à termes
5) $f(x)=\sqrt{1+x}$ par utilisation du polynôme de NEWTON
6) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ par utilisation du polynôme de NEWTON
7) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ par changement de variable
8) $f(x)=\arcsin(x)$ par intégration termes à termes

Ex 5 : (**) - Opérations sur les développements limités d'ordre n

Déterminer le DL(0) de la fonction $f(x)=\tan(x)$ d'ordre 5

- *Méthode 1* : $\tan(x)=\sin(x)\times\frac{1}{\cos(x)}$
- *Méthode 2* : $\tan(x)=\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$
- *Méthode 3* : $\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$
- *Méthode 4* : $\tan(x)=1+\tan^2(x)$
- *Méthode 5* : $\tan(\arctan(x))=x$

Ex 6 : (**) - Opérations sur les développements limités d'ordre n

Démontrer les résultats suivants :

1. $\cos(x)\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4).$
2. $\frac{1}{\cos(x)}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4).$
3. $\frac{1}{1-\sin(x)}=1+x+x^2+\frac{5x^3}{6}+\frac{2x^4}{3}+o(x^4).$
4. $\frac{1}{1-\arctan(x)}=1+x+x^2+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{3}+o(x^4).$
5. $\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{2x^3}{3}+o(x^4).$